Le pluralisme plurivalent et la métalogique.

Shahid Rahman
(Université Lille 3)
(rahman@univ-lille3.fr)

(traduction par Laurent Keiff)
(Université Lille 3)

Je me trouve dans la situation délicate d'avoir à discuter un article excellent, situation rendue plus délicate encore par le fait que je suis d'accord avec bon nombre des thèses qui y sont défendues. Je voudrais cependant faire quelques remarques, et répondre par avance à une objection qu'on pourrait dériver de l'article stimulant de Wolenski. Ce dernier point de mon argumentation est lié à un projet qui constitue l'analogue en logique de la notion de « reverse mathematics » de Friedmann, Pfeffermann et Simpson. Ce projet est, dans une certaine mesure, un défi à l'approche multivalente du pluralisme que suggère Malinowski.

Mon intervention est limitée, ce qui est à la fois un avantage et un désavantage. Je voudrais au moins prendre le temps d'une mise en jeu, et nous verrons ben ce qui se passe ensuite.

Je commencerai par une remarque mineure :
Dans son excellent historique de la logique multivalente, il y a un nom que j'aurais voulu voir apparaître : celui de Hugh MacColl. Né en 1837 et mort en 1909, il a principalement vécu à Boulogne sur Mer, et son travail, en dépit des erreurs et de son caractère inachevé, peut être considéré comme la véritable origine du pluralisme logique fondé sur la logique multivalente. A ce sujet, on peut consulter avec profit les articles de Ivor Grattan Guiness, de Stephen Read, de Volker Peckhaus et de Peter Simons dans le numéro spécial qui lui est consacré du Nordic Journal of Philosophical Logic (volume 3, 1998).

L'objection de Wolenski.
Je voudrais maintenant essayer de répondre, dans l'esprit du pluralisme de Malinowski, à une objection possible que je considère comme une conséquence de l'article de Wolenski.
Si l'on suit l'idée de Wolenski de considérer que la visée principale de la logique est métalogique, et que la métalogique est la logique classique, alors, en dépit de toute cette pléthore de logiques, il n'existe qu'une métalogique, ce qui établit l'universalité de la logique classique. Dans ce cadre, les logiques multivalentes semblent confinées à un rôle mineur.
Je voudrais discuter cette objection, que je désignerai sous le nom d'objection de Wolenski, et je commencerai par lui opposer ce passage provocateur de Girard.

Jean Yves Girard écrit, dans un article intitulé *Locus Solum*, que la distinction entre la logique et la métalogique, et plus généralement l'usage du préfixe « méta- », a souvent pour rôle de « *dissimuler l'absence de tout idée mathématique* ». Aussi conseille-t-il de « *ne pas essayer d'établir une hiérarchie entre* [par exemple] *la conjonction et « et »*, *et de s'en tenir à la signification originale* [de l'expression méta] *à savoir « d'autre part » et « paraphrase »*. » Girard va jusqu'à ajouter : « *je n'utilise jamais cette expression devant des enfants*.»

Ces lignes célèbres de Girard pourraient être considérées comme exagérées et diffamatoires, et même insultantes. Cependant, et nonobstant le caractère discutable de ses traductions du terme « méta », on peut concéder qu'elles font écho dans une certaine mesure à l'esprit de notre temps dans la communauté des logiciens, en ce qui concerne le rapport entre logique et métalogique. La théorie des catégories, les systèmes de déduction indicés, les langages hybrides, la display logic, la logique linéaire, la dialogique et les sémantiques en théorie des jeux (IF comprise), toutes ces approches explorent les possibilités de l'interaction dynamique entre le niveau logique et le niveau métalogique, et même la possibilité de faire se côtoyer des expressions logiques et métalogiques au sein d'un même langage. Et en effet, même si la logique linéaire, la logique IF et les langage hybrides possèdent bien des détermination métalogiques, ou d'ordre supérieur, telles que des règles structurelles, il reste que les prédicats de vérité et les propriétés des modèles sont exprimées dans le langage objet. La théorie des catégories suggère même un concept de métalogique plus dynamique. Certaines structures algébriques abstraites (les topoi) peuvent engendrer différentes logiques, éventuellement différentes de la logique classique, qui décrivent l'information encodée dans ces structures.

Je pense que ces nouvelles recherches tendent à faire de la logique un instrument pour travailler sur les structures théoriques. Cet instrument, à son tour conçu comme une structure abstraite, a pour rôle de faire apparaître certaines propriétés de la structure étudiée. Il n'est plus guère question de se servir de la logique pour décrire les contraintes métalogiques portant sur les structures étudiées.

La métalogique et la tradition algébrique polonaise dans un nouveau cadre.

Depuis les travaux de Tarski et les méthodes de codification introduites par Gödel, la métalogique a été associée à la théorie de la preuve, la théorie de la récursivité et la théorie des modèles. Cependant, la tradition polonaise a développé également les affinités entre la logique et l'algèbre, naguère suggérées par Boole, et que Grattan Guiness appelle le « programme d'algébrisation ».

Un des nombreux résultats importants de ce programme est la méthode Lindenbaum-Tarski pour construire une algèbre booléenne associée aux expressions d'une théorie de premier ordre des algèbres.[1] Toute algèbre booléenne est isomorphique à une algèbre de Lindenbaum-Tarski. Cependant, un des usages principaux de ces algèbres de Lindenbaum-Tarski est la description de théories. Pour les langages dénombrables, cela peut se faire en décrivant les algèbres d'intervalles isomorphiques.[2] En général, cela donne une connaissance complète de la théorie. Quelques exemples : une théorie indécidable est isomorphique à l'algèbre des intervalles des rationnels, ou les algèbres booléennes sont isomorphiques à l'algèbre des intervalles de N^2 (du produit cartésien de l'ensemble des entiers avec lui-même).

L'idée philosophique est qu'ici, et en général dans la tradition algébrique de la logique, la logique encode certaines propriétés d'une structure donnée, de façon que les propriétés de la logique permettent de prouver que la structure originale possède telle ou telle propriété, de la même façon que la théorie des groupes est utilisée en géométrie ou en topologie. Ceci est une façon de comprendre la traduction girardienne de « méta » par « paraphrase ».

En fait, la majeure partie de la théorie des catégories, qui assume explicitement la tradition algébrique, est fondée sur cette idée. Etant donné un type de structures, la question est de trouver une manière de coder les informations sur ces structures (ou sur les relations entre elles) à l'aide d'autres structures, plus maniables. Cette approche rend la relation entre mathématique et métamathématique particulièrement dynamique. Le meilleur exemple est, je crois, l'équivalence entre le théorème de Déligne en géométrie algébrique, qui établit l'existence de certains points dans certains topoi (une catégorie avec un classificateur de sous-objet), et la théorie gödelienne de la complétude.[3] Une extension de ce théorème a été prouvée par Steve Awodey, qui a montré que la logique décrivant les topoi à variation continue est équivalente à la de la logique

---

[1] Soit *T* une théorie de premier ordre dans un langage *L* de premier ordre également. Soient α et β deux formules de *T*. α et β sont équivalentes ssi on peut prouver leur équivalence logique dans *T*. La classe d'équivalence de α dans *T* est notée [α]. Soit *A* la collection de toutes les classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence. On peut transformer *A* en une algèbre booléenne en utilisant les définitions suivantes :

$[\alpha] + [\beta]$	=	$[\alpha \vee \beta]$
$[\alpha] . [\beta]$	=	$[\alpha \wedge \beta]$
$-[\alpha]$	=	$[\neg\alpha]$
$[1]$	=	$[T]$
$[0]$	=	$[F]$

[2] Celles-ci sont dérivées d'ensembles linéairement ordonnés (L,<) dotés d'un premier élément. Rapidement : on prend la plus petite algèbre des sous-ensembles de L contenant tous les intervalles [a,b[avec a dans L et b dans L ou égal à l'infini.

[3] Si on se souvient qu'un topos est dit avoir assez de points si la collection de tous ses points est conjointement surjective, alors on peut formuler le théorème de Déligne de cette manière : un topos cohérent a assez de points.

d'ordre supérieur Ce qui est remarquable, c'est qu'ici nous ne sommes pas en train de décrire la relation entre une logique et un topos, mais que certains résultats standards à propos d'un langage objet peut être compris comme la description quelques propriétés de la structure en question. Cette approche devient réellement saisissante dans le cas du théorème d'Awodey, qui souligne à juste titre que ces topoi sont des structures mathématiques classiques dont les propriétés dépendent de la notion de variation continue, et non de celle de déduction. La logique d'ordre supérieur à un est un système de déduction bien connu, remontant à Frege et Russell, et qui n'a rien à voir avec la continuité. Que ces deux résultats coïncident est réellement remarquable.[4]

La théorie des catégories est la théorie des relations dynamiques entre les structures, et cette relation se transpose vers les logiques de ces structures et leurs relations. De la même manière que les modèles de Kripke peuvent être conçus comme le produit de la relation entre des structures classiques, en théorie des catégories il arrive souvent que la structure qui décrit les relations entre deux structures dont la logique est classique, soit une structure multivalente. Il y aurait bien d'autres choses à dire ici. Il faudrait distinguer les logiques internes et externes, et discuter le fait que la logique des topos correspond en général à la logique intuitionniste, etc. Je crois cependant que ce qui a été évoqué jusqu'ici est suffisant pour donner un aperçu du fait que l'héritage de la tradition algébrique en théorie des catégories semble fournir une notion plus fine de la relation entre une logique et la théorie qu'elle décrit.

Il faudrait peut-être ajouter que certains travaux modernes, comme ceux de la logique linéaire et ceux de la logique modale hybride, cherchent à effectuer des preuves métathéoriques directement au niveau du langage objet. Les langages hybrides sont d'autre part liés à l'école d'Amsterdam en logique modale, où celle-ci est conçue comme une théorie des relations dynamiques entre les structures. Je voudrais dire un mot maintenant du cadre conceptuel dans lequel il est possible de réunir toutes ces idées.

Contre-possibles, logique inverse et métalogique. Le pluralisme multivalent contre le pluralisme substructurel ?

Un des usages classiques de la réflexion métalogique en mathématiques est d'étudier l'interdépendance des axiomes au moyen de le considération de systèmes alternatifs. Il est en effet courant de prouver des conclusions métalogiques à propos d'un système donné en construisant un autre système. Il est clair que si nous pouvons concevoir non seulement une situation contre-possible où quelque axiome n'est pas vrai, mais un système entier sans cet axiome, alors il est possible de tirer de l'étude de ce système alternatif de nombreuses informations concernant le système d'origine.

[4] Cf. Awodey [2004].

L'étude de ces contre-possibles en logique, qu'on appelle contre-logiques, est l'analogue exact des techniques mathématiques de preuve d'indépendance et motive, il me semble, l'étude des systèmes alternatifs y compris pour les monistes irréductibles.

Prenons un exemple :

Si la transitivité de la relation d'accessibilité valait dans K, alors la nécessitation de type S4 serait valide aussi.
Si les répétitions et la contraction valaient en logique linéaire, alors le tiers exclus serait valide aussi.

Dans ces exemples, la délimitation précise d'une logique est explicitement assumée comme une condition locale, exprimée au niveau du langage objet. Cependant, le conditionnel autour duquel l'assertion est construite semble suivre une autre logique, qui fonctionnerait comme une sorte de métalogique décrivant le changement des hypothèses locales concernant la validité dans la construction d'arguments du genre de ceux des exemples. Le point ici est que la logique classique ne jouit pas d'un statut privilégié. Non qu'il soit impossible de réaliser le programme d'une telle logique au sein de la logique classique, mais il est clair que pour analyser des arguments du genre de ceux qu'on a évoqué, la logique classique n'est pas le seul choix, et n'est peut être pas non plus le choix le plus judicieux.

Un autre genre d'exemples constitue un problème pour Malinowski aussi. Il nous est fourni par ce que l'on peut appeler la logique inverse, par analogie avec le programme récent de mathématiques inverses de Friedmann, Pferffermann et Simpson. L'idée de la logique inverse est de chercher les conditions de validité d'une formule. Dans ce cadre, il semble que l'approche substructurelle du pluralisme est plus naturelle que l'approche multivalente.

En résumé : le pluralisme semble ici être une nécessité et non un luxe pour de joyeux logiciens. Et il semble que ce pluralisme soit nécessaire au niveau métalogique qui est généralement considéré comme le royaume de la logique classique.