Savoirs et Textes
UMR 8519

CENTRE COMMUN D'HISTOIRE DES SCIENCES ET D'EPISTEMOLOGIE DE LILLE I

comptes-rendus du séminaire

« ANALOGIE DANS LES SCIENCES - FÉCONDITÉS ET OBSTACLES »

2003-2004

L'analogie a toujours joué un rôle fondamental dans les sciences de la nature et continue de féconder la recherche contemporaine.

En mathématiques, les ressemblances, qu'elle met en lumière entre deux domaines souvent éloignés des mathématiques, créent un pont heuristique entre ces derniers : les théories analogues se fécondent mutuellement par des transferts d'intuition, de méthodes ou de conjectures et s'éclairent dans leurs ressemblances comme dans leurs différences. Par le biais d'exemples où le travail de l'analogie s'est montré très fructueux (à savoir l'analogie entre les équations algébriques et les équations différentielles, celle entre nombres algébriques et fonctions algébriques ou encore le calcul analogique), le séminaire examinera le " pourquoi " et le " comment " de ce moment particulier où, comme le dit André Weyl, " les troubles reflets d'une théorie à une autre " laissent peu à peu la place aux théorèmes.

En physique, les ressemblances de nature entre différents effets sensibles a nourri les conceptualisations et théorisations de différents objets, avant que les conceptions du monde en termes de mécaniques ou d'énergie ou d'électromagnétisme permettent de faire entrer dans un ensemble cohérent des approches initialement analogues. Les efforts de modélisation ont permis aussi d'emprunter à des branches de la science un terreau permettant à d'autres disciplines de s'édifier et de s'individualiser.

En biologie, l'utilisation de l'analogie dans les sciences du végétal est régulièrement discutée. Elle est omniprésente dans les débats savants au XVIIIe siècle autour des maladies des plantes, et pas seulement dans le sens des modèles de la maladie chez l'animal vers ceux de la maladie chez le végétal.

Tous ces exemples permettent de montrer que l'analogie fait partie intégrante du processus d'élaboration des sciences, parfois pour stimuler la création, parfois pour la retarder ou la bloquer. Ce sont ces riches rapports dialectiques que nous voulons mettre en évidence au cours de cette année à partir d'exemples historiques précis.

L'analogie dans les sciences du végétal : méthode heuristique ou obstacle

À partir des positions de Felice Fontana et d'Augustin Pyrame de Candolle en rapport avec leurs travaux sur les maladies des plantes

Gilles Denis
Université Lille 1, UMR "Savoirs et textes"

Le problème de la méthode analogique est souvent mis en avant dans les histoires des sciences du végétal où l'on s'interroge régulièrement sur les relations entre anatomies, physiologies, biologies animales et végétales, botanique et zoologie[1].Bien que l'analogie ne fonctionne pas uniquement dans le sens de l'animal vers le végétal mais aussi dans l'autre sens ou à partir d'autres ensembles d'êtres ou d'objets, c'est généralement dans ce premier sens que le problème de l'analogie est posée.

Certains historiens estiment que la méthode analogique fonctionne comme une hypothèse proposée à la seule fin d'être testée[2] ; d'autres considèrent qu'elle peut être, tout comme la méthode expérimentale, facteur d'avancement ou facteur de retard dans le progrès des connaissances, selon la perspicacité du savant[3] ; plus souvent, les historiens opposent la méthode analogique, cause de stagnation, à la méthode fondée sur l'observation et l'expérimentation, à l'origine des progrès en physiologie végétale[4].

Depuis plusieurs années, travaillant sur les sciences du végétal à la fin de l'époque moderne, nous constatons que l'analogie est omniprésente dans les textes mais nous n'avons rencontré que de rares auteurs qui la mentionnaient clairement et en discutaient, que ce soit pour la défendre ou pour tenter de s'en passer. C'est le cas des deux auteurs qui nous intéressent particulièrement ici, Felice Fontana qui propose, en 1767, une méthode pour s'en dégager et Augustin Pyrame de Candolle qui, au contraire, y trouve, en 1804, une voie d'accès à une meilleure connaissance des propriétés des plantes. C'est avant tout parce qu'ils discutent explicitement du bien-fondé du raisonnement par analogie que nous avons choisi

[1]Voir la présentation de François Delaporte des différentes opinions qui ont été soutenues vis à vis du rôle de l'analogie pour établir l'histoire de la physiologie végétale : François Delaporte, *Le second règne de la nature*, Paris, Flammarion, 1979 ; pp. 11-18. Nous avons gardé les trois catégories qu'il définit.

[2]Voir Julius von Sachs, *Histoire de la botanique du XVIème siècle à 1860*, Paris, Reinwald, 1892 ; p. 273 et P. C. Ritterbush, *Overtures to Biology*. *The Speculations of Eighteenth-Century Naturalists*, New Haven and London, Yale Univetsity Press, 1964 ; p. 81.

[3]Voir von Sachs, op. cit. ; p. 373 et Jean Rostand, *Les Origines de la biologie expérimentale et l'Abbé Spallanzani*, Paris, Fasquelle, 1951 ; p. 211.

[4]Voir Raoul Combes, *Histoire de la biologie végétale en France*, Paris, Alcan, 1933 ; pp. 9-10 et Davy de Virville, Histoire de la botanique en France, Paris, Soc. d'éd. d'ens. sup., 1954 ; p. 95. Voir aussi Davy de Virville, " De l'influence des idées préconçues sur le progrès de la botanique du XVème au XVIIIème siècle " in *Revue d'Histoire des sciences*, X, 2 (avr.-juin 1957) ; pp. 110-119.

de présenter ici ces deux auteurs. Le premier, Felice Fontana, insiste sur les limites de l'analogie en mettant l'accent sur les a priori des auteurs qui déterminent, selon lui, le choix de l'analogie et qui fait donc que le raisonnement qui s'appuie sur elle nous égare et ne peut pas nous aider à connaître la nature. Le second, Augustin Pyrame de Candolle, insiste plutôt sur la régularité des phénomènes naturels qui autorise les " lois de l'analogie. " Celles-ci permettraient ainsi de confirmer le bien fondé (c'est-à-dire en accord avec la nature) d'un système de classification des végétaux en liant les formes extérieures à leurs propriétés intrinsèques, et d'augmenter les connaissances dans l'histoire naturelle, faisant ainsi de celle-ci, selon ses critères, une véritable science. L'étude de ces deux auteurs donne l'occasion de s'intéresser d'une manière plus générale à l'utilisation de l'analogie dans les sciences du végétal. Fontana et de Candolle ont travaillé tous les deux sur les maladies des plantes, sur leur nature, leurs symptômes et leurs causes, et c'est en s'appuyant sur ce travail qu'ils discutent de l'analogie. Ils partagent le même point de vue sur la cause des maladies des plantes, qu'ils attribuent à des plantes cryptogames microscopiques parasites ; ils défendent donc des explications (et des méthodes) différentes de celles, plus traditionnelles, des auteurs agriculteurs et chimistes qui considèrent que les maladies proviennent de perturbation dans le fonctionnement de la plante, généralement sous l'effet d'intempéries particulières ou de substances chimiques externes[5].

Dès l'Antiquité, Aristote et Théophraste s'interrogent sur l'utilisation de l'analogie en tant que moyen d'étendre la connaissance dans le domaine du vivant. Leur réflexion influence la pensée de ceux qui s'y intéressent au XVIIIème siècle. D'autre part, l'utilisation de l'analogie nous semble lier à la reconnaissance implicite ou explicite d'une classification naturaliste. Nous avons ainsi dans un premier temps aborder l'état de la question avant que n'interviennent nos deux auteurs et discuter des rapports qui nous semblent lier étroitement l'analogie et les classifications.

Felice Fontana et Augustin Pyrame de Candolle abordent le problème de l'argument par analogie ; l'un dans le cadre d'une réflexion épistémologique sur la méthode scientifique, l'autre dans celui d'une réflexion philosophique mais aussi épistémologique sur la signification d'un classement des objets de la nature.

Que signifie cette ressemblance entre deux objets, pour lesquels on fait jouer l'analogie, qu'elle soit relevée par l'auteur ou sous-entendue implicitement par lui comme allant de soi : est-elle inhérente à ces deux objets, dépend-elle de l'observateur, n'est-elle que fortuite ou renvoie-t-elle à une signification moins immédiate, est-elle une apparence provoquée par un rapprochement accidentel et insignifiant ou l'expression phénoménale d'une nécessité sous-jacente ? Fontana pense qu'elle dépend de l'observateur et qu'elle est généralement fortuite. De Candolle pense qu'elle est inhérente aux deux objets et qu'elle renvoie à une signification moins immédiate.

Fontana commence par chercher à rejeter le raisonnement par analogie parce qu'il dépend entièrement des préjugés de celui qui l'utilise ; il tente de le remplacer par une méthode qui s'appuierait sur une grande quantité d'observations, dans différentes circonstances ; il espère ainsi que ces observations viendront à bout des préjugés. La nature a une cohérence mais nous ne pouvons, de par nos propres limites, l'atteindre aisément et directement. Cette

[5]Voir Gilles Denis, *Les maladies des plantes de 1755 à 1807, controverses et dominances*, Paris, Université de Paris I - Panthéon - Sorbonne, 1994.

opinion de Fontana est présente chez plusieurs historiens des sciences du végétal qui tentent de préciser la manière dont celles-ci ont progressé ou stagné dans le passé. Certains d'entre eux opposent en effet l'utilisation des analogies, notamment l'analogie entre plante et animal, perçues comme facteur d'erreur et de frein, à l'observation méthodique et à la méthode expérimentale. Cependant, nous remarquons que Fontana, comme tous les autres auteurs de son époque qu'il accuse d'en être prisonniers, utilise, malgré lui, lui aussi, l'analogie et s'appuie pour cela, comme eux, sur ce qu'il connaît, à savoir, pour lui, ses travaux sur les parasites des animaux, ceux de Micheli, son maître, sur les plantes parasites de grande taille et sur les cryptogames microscopiques et, plus loin encore dans le passé, ceux de Boccone, prédécesseur de Micheli, qui privilégie, pour identifier et classer les plantes rares, leur aspect général, leur port. L'analogie suivie implicitement par Fontana correspond à une définition et une classification préétablies d'êtres microscopiques reconnus comme plantes. Son approche, son choix de l'explication de la maladie, ses descriptions des corpuscules microscopiques présents dans les symptômes des plantes malades de la rouille, s'inscrivent dans une longue tradition présente spécifiquement à Florence et que l'on retrouve chez son concitoyen et contemporain Targioni-Tozzetti. Tradition peu présente ailleurs à ce moment là et qui explique l'absence, dans cette période, de reprises en Europe des opinions des deux auteurs toscans. Fontana participe néanmoins à une accumulation d'observations, de descriptions qui peu à peu s'intensifie dans toute l'Europe des botanistes dans le dernier tiers du XVIIIème siècle et au début du siècle suivant et qui seront à l'origine d'une véritable botanique des plantes microscopiques, comme la dénommera Sénebier ; botanique qui, par son niveau d'élaboration, a joué un rôle dans la reconnaissance des modèles botaniques d'explication des maladies des végétaux qui accusent des plantes microscopiques parasites. Ce n'est pas telle ou telle analogie ou telle ou telle expérience ou observation qui a permis de trancher entre les différentes hypothèses, mais plutôt, semble-t-il, le niveau d'élaboration de la botanique des plantes microscopiques et des explications botaniques des maladies des végétaux qui hiérarchisent et précisent les causes et les circonstances, niveau permis par la mobilisation, dans différents pays, de nombreux savants, et par la place prise par la botanique à la fin du XVIIIème siècle ; tandis que piétinent le modèles proposés par les chimistes. Il faut en effet ajouter que la botanique apparaît de moins en moins comme une discipline de nomenclateurs remisée au fond des cabinets d'histoire naturelle, comme le répétaient ses détracteurs, mais de plus en plus comme étant capable à la fois de résoudre des problèmes pratiques, agronomiques ou plus traditionnellement médicaux, mais aussi d'étendre la connaissance. Les théories de l'acclimatation et la géographie botanique, qui naissent à la fin de l'époque moderne, sont reconnues notamment comme ses filles. La classification botanique joue un rôle dans l'édification de disciplines comme la nosologie et la nomenclature chimique. On s'intéresse à la botanique et à ses propositions de plus en plus hors du monde de ses savants et comme pouvant être utiles. La tradition toscane s'est étendue à l'Europe ; s'ajoutent à elle de nouvelles circonstances favorables à la botanique.

L'autre auteur que nous avons étudié, de Candolle, est confiant dans les possibilités de l'analogie car il croît en une certaine constance dans la nature et en notre possibilité de la reconnaître et de l'utiliser. Elle sert à étendre le nombre de plantes utiles connues pour l'agriculture et la médecine. Il l'intègre dans les débats qui opposent méthode naturelle et système artificiel de classification. Les cryptogames parasites microscopiques ne sont pas au hasard sur les plantes. Ils sont là où ils peuvent trouver les sucs nutritifs dont ils ont besoin en particulier ; ils sont l'étiquette qui indique telle ou telle propriété intérieure des plantes sur lesquelles ils sont. Ils sont la preuve du bien-fondé des " lois de l'analogie " et peuvent donc servir à l'établissement d'une véritable classification naturelle et à sa confirmation ; le projet de recherche d'une méthode naturelle n'apparaît donc pas chimérique mais, bien au contraire, légitime. La classification des plantes basée sur les " organes de la reproduction " est naturelle puisque étant respectée par les cryptogames parasites microscopiques elle est donc en accord avec une classification qui serait basée sur les " organes de la nutrition ", seule classification qui serait pleinement naturelle. Pour les auteurs du XVIIIe siècle, une classification basée sur les " organes de la nutrition " serait naturelle chez les végétaux si elle était possible comme chez les animaux car ces organes sont à l'origine de l'identité de l'espèce. Ils sont responsables du fait qu'une menthe est une menthe et une ortie une ortie même si elles se nourrissent toutes les deux des mêmes aliments. Si les plantes microscopiques parasites choisissent spécifiquement de se développer sur les mêmes espèces ou mêmes genres de plantes selon la classification basée sur les " organes de la reproduction ", qu'ils reconnaissent ainsi des identités ou des similarités chimiques, cela signifie que cette classification renvoie à une classification naturelle, celle qui serait basée sur les " organes de la nutrition. "

Fontana cherche à identifier ce qui est microscopique ; de Candolle utilise le microscopique pour reconnaître le caractère naturel de la classification du support sur lequel il se trouve. On peut se demander néanmoins si le raisonnement de de Candolle ne se développe pas selon un cercle (vertueux ?) : la méthode de classification naturelle est légitimée par le fait que les mêmes cryptogames microscopiques parasitent des plantes proches du point de vue de la systématique choisie (ces cryptogames dévoilent ainsi des propriétés internes, intrinsèques, essentielles, en rapport avec les caractères externes) mais ces cryptogames ne sont-ils pas identiques, proches ou séparés selon les critères et les principes de cette classification ? On peut ajouter que même si on accepte que le raisonnement de de Candolle mette en concordance analogique deux séries de formes, celles des plantes et celles des corpuscules microscopiques qui se trouvent sur elles formant des taches colorées, cela ne signifie ni que ces corpuscules sont des plantes parasites, ni que la classification est, par conséquent, selon ses dires, conforme à la nature. En effet, si, en suivant l'opinion d'auteurs qui, tel Rohault[6], pensent que ces taches sur les plantes malades sont des " météores ", on décide de regrouper les plantes selon la quantité et la qualité justement des " météores " aqueux ou non aqueux (rosées, miels, " miellats ", mannes, rosées farineuses, etc.) qui se déposent sur les feuilles, les branches, les fleurs ou les fruits, ce regroupement correspondrait, sans doute, en grande partie à la classification basée sur les " organes de la reproduction " mais le lien avec une classification basée sur les " organes de la nutrition " disparaîtrait. Le sens de cette correspondance entre caractéristiques des dépôts et classification des plantes pourrait s'expliquer par la reconnaissance de propriétés attractives particulières des plantes qui respectent cette classification. On suivrait ainsi Rohault qui prétend que les exhalaisons qui composent le " miellat " tiennent de la nature de l'huile et sont pour cela attirées par les corps les plus secs caractéristiques, à l'époque de sa chute, des blés et des " plantes analogues " ; ou bien on suivrait Mattioli[7] qui affirme que si la " manne " ne s'écoule que des frênes, c'est parce

[6] Jacques Rohault, *Traité de physique*, Paris, Vve Charles Savreux, 1671 ; pp. 279-281.

[7] Mattioli, Commentaire sur le I livre de Dioscorides, traduit en français par J. Desmoulins, Paris, G. Roville, 1572 ; pp. 77-81. Cet ouvrage présente une bibliographie portant sur ce thème.

ce qu'elle y pénètre en particuliers, bien que tombant universellement sur toutes les plantes généralement sans s'y arrêter, selon un rapport naturel occulte et secret que ces arbres ont avec la " manne " comme, dit-il, l'aimant attire le fer et l'ambre la paille. Dans ce choix, disparaîtrait la preuve par l'observation que constituait pour de Candolle le respect par les plantes parasites microscopiques de la classification basée sur les " organes de la reproduction. " Cette preuve en effet ne tient que si on considère que ce sont bien des parasites qui se nourrissent de sucs particuliers, résultats des " organes de la nutrition " et expressions des propriétés chimiques internes. On peut encore ajouter qu'alors même que de Candolle explique l'importance de ces " organes de la nutrition " en disant qu'ils sont responsables du fait que le même sol produise des plantes différentes et des sols différents des plantes semblables, il ne considère pas pour autant, au contraire, cette remarque pour conclure, par analogie, qu'observer des plantes parasites microscopiques identiques ou semblables sur des plantes d'espèces différentes ne signifient pas que ces dernières produisent des sucs identiques ou semblables. Des parasites semblables, selon cette remarque, pourraient se nourrir de sucs différents et des parasites différents de sucs semblables. Disparaît alors la preuve du caractère naturel de la classification basée sur les " organes de la reproduction. "

Il est sans doute plus aisé généralement de dire ce qui est identique que de dire ce qui est semblable. Il y a, dans l'affirmation que deux êtres, deux caractères, deux événements, sont semblables, une part d'interprétation largement due à l'auteur, à sa formation, à son contexte historique. S'ajoute ainsi, pour l'analogie, au problème classique, logique, de l'induction, le problème de la justification de l'extension d'un discours d'un objet à un autre qui lui est différent mais semblable.

Nous avons à plusieurs reprises remarqué que le raisonnement analogique semble étroitement lié au processus classificatoire. Aristote revendiquait ce lien et classait en genre, en cherchant à suivre la méthode populaire, en rassemblant les êtres qui se ressemblaient par " le plus ou le moins " et en écartant les êtres qui se ressemblaient par l'analogie. L'analogie sous-entend une définition de ce qui est le même, l'identique, le semblable, le proche, le différent, etc., ce qu'il faut mettre dans la même espèce, le même genre, le même ensemble de genre, etc., donc une classification préalable explicite ou implicite. La validité du raisonnement par analogie est ainsi liée à la signification de la classification. Celle-ci est soit simplement commode, fortuite, soit l'image, le reflet d'un certain ordre dans la nature. Dans le premier cas, le raisonnement analogique qu'elle provoque serait alors illusoire et largement déterminé par l'a priori de l'auteur qui l'utilise ; dans le second cas, il permettrait d'accroître notre " connaissance " (comme par exemple la découverte, chez de nouvelles plantes, de propriétés médicamenteuses).

Le rôle de l'analogie dans les sciences du végétal n'est pas négligeable puisqu'elle participe d'une manière permanente à la construction des observations et des expériences et à l'établissement des explications théoriques. Mais ce n'est pas elle qui y détermine le succès de tel ou tel modèle, puisque tous, même les plus contradictoires, font appel à elle. Ainsi, on peut établir que l'analogie participe à la construction d'un discours scientifique mais pas qu'elle sert à le justifier ou à le faire reconnaître comme " vrai. " On ne peut donc présenter l'analogie comme un obstacle puisque participant intrinsèquement à tout moment à la construction des sciences du végétal. On ne peut pas non plus dire que la méthode analogique est heuristique car cela pourrait signifier que l'on entend une séparation en deux étapes séparées et différentes de cette méthode et de la construction scientifique, la première, d'une certaine manière, celle de l'imagination et de l'intuition où se placerait l'utilisation de l'analogie, et la seconde, celle de l'établissement de la preuve, de la mise en ordre véritablement scientifique notamment au travers du filtre de l'expérience et de l'observation. Or la méthode analogique est encore une fois une partie intégrante de la construction des sciences du végétal au même niveau que l'expérience et l'observation.

Le modèle du vivant dans la chimie à l'âge classique

Bernard Joly
professeur de philosophie et d'histoire des sciences à l'université de Lille 3
UMR " Savoirs et Textes " (CNRS, université de Lille 3, université de Lille 1)

La tripartition des êtres en trois règnes, minéral, végétal et animal est antique, puisqu'on l'attribue habituellement aux stoïciens. Elle nous semble très commode, mais nous l'admettons habituellement avec un correctif important : ce qui sépare le minéral du végétal l'emporte sur ce qui sépare le végétal de l'animal, puisque végétaux et animaux font partie du règne vivant. Nous privilégions donc de fait une opposition entre ce qui est inorganique, mécanique, inanimé et ce qui est organique, vivant, animé. La question de savoir ce qui spécifie le vivant surgit au XVIII^{e} siècle, en réaction à la thèse cartésienne des animaux-machines, qui nie radicalement la spécificité du vivant. Cela produit aussi bien l'animisme de Stahl que le vitalisme, qui prend lui-même deux figures : tandis que, suivant l'école de Montpellier, beaucoup de médecins jusque Bichat distinguent deux matières, l'une inanimée, soumise aux lois mathématiques de la physique, l'autre animée, spécifique au vivant et étudiée par la biologie, Diderot, refusant l'opposition vivant-inanimé, restitue l'unité de la matière en supposant qu'il existe partout des parcelles de vie, des semences. Cette doctrine matérialiste, qui connut ses derniers avatars à la fin du XIX^{e} siècle avec la panspermie de Lord Kelvin et Arrhénius, nous semble aujourd'hui étrange. Il me semble qu'elle s'inspire de doctrine chimiques du XVII^{e} siècle, souvent appelées alchimiques, qui affirmaient la croissance des métaux dans les mines à partir de semences minérales, qui utilisaient volontiers des métaphores végétales ou sexuelles et qui déployaient un étonnant bestiaire où les propriétés d'animaux, parfois fabuleux, semblaient devoir expliquer les propriétés des corps chimiques dont ils étaient rapprochés.

On pourrait penser qu'il s'agit de simples métaphores. C'est ainsi que nous comprendrions aujourd'hui des énoncés affirmant que « l'acide a dévoré le métal », « l'antimoine est un loup dévorant les impuretés de l'or » ou encore « les métaux croissent dans les mines qui sont leur matrice ». Nous considérons que de telles expressions abusent d'images qui obscurcissent la compréhension. Pourtant, dans la chimie du XVII^{e} siècle, le recours à de tels énoncés relève bien de l'analogie, c'est à dire de l'affirmation d'une raison commune au minéral et au vivant : il y a réitération dans le champ du minéral d'une raison, ou d'une causalité à l'œuvre dans le champ du vivant. Dans ces conditions le rapprochement, qui pour nous obscurcit la compréhension, exprime à l'époque une identité au delà des différences : il fait comprendre en exhibant l'unité sous-jacente d'une nature dont les principes sont toujours les mêmes, ce qui autorise la mise en correspondance des raisons d'un domaine avec celles d'un autre et permet le passage des raisons connues d'un domaine à celles, inconnues, d'un autre. Loin de bloquer la pensée, l'analogie est alors ce qui permet sa progression.

I - Le recours à quelques exemples permettra d'illustrer cette situation.

Les ouvrages alchimiques illustrés étaient très répandus en Europe au XVII^{e} siècle ; certains d'entre eux semblent avoir été de véritables succès de librairie. Ils ne doivent cependant pas être considérés comme représentant l'essentiel de la production alchimique de l'époque. Ils jouent un rôle de vulgarisation de la philosophie chimique, sans retenir la rigueur conceptuelle des traités ni la précision technique des recueils de recettes souvent rédigées à des fins pharmaceutiques. Ils exploitent cependant des aspects essentiels de la pensée chimique de l'époque. Certes, les images n'apprennent rien en elles-mêmes, puisqu'elles doivent être décryptées par une théorie qui s'expose ailleurs. De ce point de vue, elles sont inutiles au véritable chimiste. Elles sont cependant nécessaires parce qu'elles expriment l'analogie qui sous-tend les développements théoriques, la légitimant en mettant en scène l'objet où se rassemblent les raisons que l'on compare.

1) *Rosarium philosophorum* (la roseraie des philosophes)

Cet ouvrage, sans doute écrit dans la première moitié du XIV^{e} siècle, n'est qu'un collage de textes antiques et médiévaux, florilège, c'est-à-dire bouquet de citations habilement rassemblées. L'édition imprimée à Francfort en 1550 est accompagnée de gravures représentant les diverses étapes de la fabrication de la Pierre des philosophes sous la forme de la rencontre, de la copulation et de la mort d'un couple royal représentant les deux principes (Mercure et Soufre) dont l'union, qui devient putréfaction, permet l'extraction d'une âme ou esprit, semence métallique qui viendra ensuite, en se corporifiant à nouveau, revivifier la matière morte et donner naissance à un métal parfait.

2) *Viridarium chimicum* (le jardin chimique)

Il s'agit d'une compilation d'ouvrages d'emblèmes alchimiques éditée par Daniel Stolcius à Francfort en 1624. Comme le titre l'indique, le rassemblement de ces textes ne relève plus seulement de l'art du bouquet : la théorie illustrée constitue le terrain sur lequel va croître la science de l'alchimiste, dont les activités de laboratoire sont comparables à celles d'un jardinier.

3) *Atalanta fugiens* (l'Atalante fugitive)

Michaël Maier, l'un des médecins chimistes les plus célèbres en Allemagne au début du XVII^{e} siècle, fait paraître à Oppenheim en 1618 cet ouvrage qui est resté le plus célèbre des livres d'emblèmes alchimistes. Les divers épisodes du récit mythique d'Hercule venant délivrer les Hespérides et se procurer les pommes d'or qui confèrent l'immortalité, puis de la course d'Atalante et Hippoménée, amants finalement transformés par Zeus en lions, deviennent le symbole des diverses opérations de la chimie. Chacune des quarante-quatre gravures est accompagnée d'un poème mis en musique sous la forme d'une fugue, ainsi que d'un commentaire chimique. De nombreuses images reprennent l'analogie agricole, le thème du pourrissement, de la fermentation et de la régénération.

4) *De lapide philosophico* (la pierre philosophale)

On ignore qui est le véritable auteur de ce poème alchimique de la fin du XVI^{e} siècle dont l'édition dans le *Musaeum hermeticum* (1625, édition augmentée en 1678) est accompagnée de gravures représentant notamment le bestiaire alchimique : deux gros poissons dans la mer, le dragon Ourouboros (qui se dévore la queue) déjà représenté dans les manuscrits de l'alchimie gréco-alexandrine, les deux lions ailés, les chiens dévorants et la salamandre qui ne périt pas dans le feu. Le médecin chimiste Pierre-Jean Fabre a commenté ces images dans son *Manuscriptum ad Fridericum*, petit traité alchimique rédigé en 1653, mais seulement publié à la fin du XVII^{e} siècle, en Allemagne.

II - Une théorie sous-jacente qui rend possible le développement de l'analogie.

Les théories (al)chimiques qui se développent au XVII^{e} siècle ne sont certes pas homogènes, mais certains traits généraux peuvent être dégagés. On trouve en effet dans la plupart de ces traités :

1) une philosophie naturelle fondée sur les correspondances entre le haut et le bas et la circulation d'un esprit universel qui se corporifie ;
2) une théorie des métaux fondée sur l'opposition fondamentale des deux principes que sont le Mercure (féminin) et le Soufre (masculin), avec la doctrine d'une semence engendrant les métaux dans les mines ;
3) l'idée selon laquelle l'art (le travail de laboratoire) peut reproduire et réparer les processus naturels ;
4) une conception des opérations de laboratoire fondée sur l'observation des processus propres au domaine du vivant : une décomposition qui libère l'activité des principes ("anatomie des métaux"), une fécondation des métaux impurs (cuivre, plomb) par une semence qui les revivifie et les perfectionne (production de l'argent et de l'or) ;
5) une correspondance entre la chimie et la médecine qui se décline sur plusieurs plans : le chimiste guérit les métaux avec une pierre philosophale qui est une médecine, l'homme est un être minéral qui peut être guéri avec des médicaments chimiques, le corps de l'homme fonctionne comme un alambic.

Conclusions

Rendre leur force rationnelle aux analogies de la philosophie chimique à l'âge classique conduit à mettre en évidence :
1) l'illusion d'une histoire des sciences qui voudrait voir dans le développement de la chimie moderne le seul résultat de l'irruption de la pensée mécaniste et corpuscularise ;
2) l'absurdité des approches contemporaines de l'alchimie qui la réduisent à un jeu d'images et de métaphores ;
3) l'anachronisme de l'opposition chimie/alchimie en ce qui concerne le XVII^{e} siècle ;
4) le caractère évolutif des formes de la rationalité et de ses enjeux.

Bibliographie

- *Rosarium philosophorum. Ein alchemisches Florilegium des Spätmittelalters*, fac-similé de l'édition de 1550 édité et commenté par Joachim Telle avec une traduction allemande de Lutz Claren et Joachim Huber, Weinheim, VCH Verlagsgesellschaft, 1992 ; *Le Rosaire des philosophes*, traduit du latin par Etienne Perrot, Paris, Librairie de Médicis, 1973.
- Daniel Stolcius, *Viridarium chimicum ou le jardin chymique*, introduction, traduction et commentaires de Bernard Husson, Paris, Librairie de Médicis, 1975.
- Michael Maier, *Atalanta fugiens*, traduction d'Etienne Perrot, Paris, Librairie de Médicis, 1969.
- Lambsprinck, *De lapide philosophico*, in *Musaeum hermeticum reformatum et amplificatum*, fac-similé de l'édition de 1678 édité et commenté par Karl R. H. Frick, Akademische Druck, Graz, 1970 ; *La pierre philosophale*, texte latin et traduction française, Milan, Archè, 1981.
- Hiro Hiraï, *Le concept de semence dans les théories de la matière à la Renaissance*, thèse soutenue en 1999 à l'université de Lille 3, à paraître.
- Bernard Joly, *La rationalité de l'alchimie au XVII^e siècle, avec le texte latin*, la traduction et le commentaire du Manuscriptum ad Fridericum de *Pierre-Jean Fabre*, Paris, Vrin, 1992.
- Barbara Obrist, *Les débuts de l'imagerie alchimiste (XIV^e-XV^e siècle)*, Paris, Le Sycomore, 1982 (épuisé).
- Jacques Van Lennep, *Alchimie : contribution à l'histoire de l'art alchimique*, Paris, Dervy, 1993.

L’analogie dans le médioplatonisme

Joëlle Delattre
Maître de Conférence honoraire à l’université de Lille 3
équipe CNRS HALMA 8142

Commençons par rappeler que le premier sens du terme grec *analogía* est tout d’abord la «proportion mathématique», avant qu’il signifie plus largement «correspondance», «analogie ». De même le verbe *analogeîn* veut dire soit «être proportionnel» soit «être analogue», soit enfin «correspondre».

En géométrie les *mésai análogoi* sont précisément les moyennes proportionnelles, et l’expression *anà lógon* (en deux mots) est employée au sens de «proportionnellement à», ou «relativement à».

D’ailleurs, dans le dialogue de Platon intitulé Gorgias, texte parfois considéré comme une sorte de programme pour faire comprendre au public Athénien les valeurs et les méthodes de l’Académie - laquelle venait d’être fondée en 388-387 (nous sommes au début du 4e s. av. n. è.)[8] -, l’analogie est utilisée en référence explicite à la manière de procéder des géomètres (465 b7), même s’il ne s’agit que de faciliter l’expression précise et concise d’une définition assez complexe de la rhétorique. Nous partirons de ce texte célèbre comme d’un bel exemple de l’usage philosophique de l’analogie géométrique, tel que le préconisait le fondateur de l’Académie.

Cependant, imaginer que le philosophe platonicien n’use pas aussi de l’analogie au strict sens de la proportion géométrique serait par trop réduire son œuvre à ses seules dimensions éthiques et politiques. Les commentateurs de Platon qu’il est convenu d’appeler aujourd’hui « médioplatoniciens » comme Plutarque, dans l’*E de Delphes*, ou dans la *Création de l’âme dans le* Timée, mais aussi Nicomaque de Gérase ou Théon de Smyrne dans leurs écrits arithmétiques et musicaux, ont essayé d’expliciter pour leurs contemporains les énigmes scientifiques contenues dans les grands dialogues de Platon. En particulier, ils ont été amenés à développer, sous l’influence sans doute des recherches de quelques savants néo-pythagoriciens plus calculateurs que musiciens, la réflexion sur les règles de calcul des médiétés (moyennes arithmétique, harmonique, et géométrique) platoniciennes. Nous nous interrogerons donc aussi sur les enjeux philosophiques du développement de la science des médiétés : recherche de l’unité et de la cohérence de tous les savoirs, et du « lien unique » qui les organise et les maintient, comme le mélange numérique du démiurge structure l’âme du monde, dans le *Timée* de Platon, à partir des sept nombres fondamentaux qui la constituent.

Mais il serait à nouveau trop réducteur de limiter l’usage scientifique de l’analogie par le philosophe platonicien au seul calcul des médiétés. C’est aussi à un usage plus instrumental de l’analogie que nous nous intéresserons. L’emploi de l’analogie dans l’opération de mesure

[8] Cf. Introduction de M. Canto au Gorgias, éd. GF Flammarion, p. 93 note 1.

des distances et tailles des astres nous obligera à démêler soigneusement les enjeux scientifiques, des présupposés et des exigences philosophiques, concernant les procédures mises en œuvre : l'analogie était-elle un instrument scientifique pour atteindre et percevoir l'unité de la réalité diverse et multiple, ou bien était-elle le moyen privilégié par les philosophes platoniciens pour apprendre à saisir intellectuellement la diversité et la richesse de l'unité fondamentale ?

1) L'analogie comme mise en rapports d'équivalence de termes de même nature ou de nature très voisine : un moyen pour définir et comprendre emprunté aux géomètres

Dans le texte du *Gorgias* dont je viens de parler[9], on appréciera comment l'analogie des géomètres est utilisée pour « faire comprendre », pour distinguer et clarifier des choses habituellement confondues, et pour faciliter un « bon jugement » en introduisant ordre et raison dans le chaos et la confusion ordinaires.

La politique a 2 parties vraies... (elle est double)	la législation la justice (comme institution)
La rhétorique a un double (ou plutôt un sosie ?)	la rhétorique la sophistique**
Le soin du corps comporte 2 parties vraies	la médecine la gymnastique
à quoi correspondent 2 parties trompeuses	la cuisine la toilette

** ce sont donc les 2 parties trompeuses correspondant aux 2 parties vraies de la politique.

La politique vise le bien commun et la vérité (objets aussi de la réflexion philosophique), comme le soin du corps vise la santé : il s'agit pour l'une comme pour l'autre d'éviter la maladie, la débauche et la destruction, en trouvant la bonne mesure, le bon régime. Dans le passage du *Gorgias*, la confusion est analysée au niveau de la santé, entre médecine et cuisine, puis entre toilette et gymnastique, et les liens ainsi créés entre les quatre arts se préoccupant du corps jouent ensuite le rôle de moyens, pourrait-on dire, pour penser le dédoublement trompeur de la rhétorique.

[9] Platon, *Gorgias* 463 e-465 e.

A) soin correct des corps ... .santé	cuisine (3') et ......toilette (4')
médecine **(3)** et gymnatique **(4)**	maladie débauche, destruction
B) soin correct des âmes... politique législation **(1)** justice **(2)**	**rhétorique persuasive** **usurpatrice** **et injuste**
rhétorique juste **du philosophe**	aucun souci des âmes sophistique (1') et (2')

Ainsi la rhétorique juste du philosophe se trouve-t-elle, par rapport au soin correct des âmes visant la justice et le bien commun, dans le même rapport que la médecine et la gymnastique par rapport au soin correct des corps visant la santé. Au contraire, la sophistique, politique ou judiciaire, en usant de la rhétorique usurpatrice et trompeuse, est en position d'extrême par rapport au soin correct des âmes, de même que le sont maladie, débauche et destruction, engendrées par les arts de flatterie.

Nous avons évité d'inscrire entre les rapports du *Gorgias* un signe « égal », pour ne pas froisser les géomètres. Pourtant une page très célèbre[10] du livre VI des *Lois* de Platon nous y autorisait en quelque sorte. Le philosophe y est amené, en effet, à définir politiquement «deux sortes d'égalité qui portent le même nom mais en pratique s'opposent presque», en distinguant « celle qui est égale selon la mesure, le poids et le nombre et qu'il suffit de réaliser par le sort dans les distributions » (on y recourt pour éviter le mécontentement populaire), de l'égalité « la plus vraie et la plus excellente », celle qui « suppose le jugement de Zeus », parce qu'elle « attribue davantage au plus grand et au plus petit, moins, en donnant à chacun selon sa nature » (proportionnellement et en visant la plus grande justice). Le problème, bien entendu, est que cette dernière échappe au jugement des hommes qui ne peuvent que s'efforcer sans cesse de l'atteindre, y compris par hasard, au moyen de l'autre !

2) L'analogie comme proportion parfaite : un moyen pour approcher l'idéalité mathématique par les calculs ou par la construction géométrique

Dans la deuxième partie du livre II sur la musique, Théon de Smyrne propose, en se référant explicitement à Eratosthène, une méthode pour engendrer à partir de l'unité répétée trois fois et pour y revenir ensuite par l'opération inverse, tous les termes des rapports de proportionnalité en nombre entiers, rapports doubles et triples, mais aussi « d'un plus une part » et autres multiples et inverses. Cela donne lieu à une série de tables de trois nombres dont on peut montrer qu'elles ont à voir plus ou moins avec ce qu'on appelle aujourd'hui les « identités remarquables ». Cela devait constituer sans doute aussi un outil mnémotechnique

[10] Platon, *Lois* VI 756 e-758 a, trad. E des Places, 1951.

facile pour connaître rapidement les valeurs entières de la moyenne géométrique entre deux termes. Nicomaque de Gérase, dans l'*Introduction arithmétique* développe aussi de telles séries de trois nombres correspondant aux différents rapports harmoniques.

De fait, toutes les recherches harmoniques que l'on trouve chez les commentateurs des premiers siècles se réfèrent à un texte source de Platon, *Timée* 36a :
« *Comme des intervalles* hémioles (3/2), épitrites (4/3) *et* épogdes (9/8) *naissent de ces liens dans les intervalles précédents*[11]*, le dieu a rempli tous les intervalles épitrites au moyen de l'intervalle de l'épogde, laissant une fraction de chacun d'eux ; cet intervalle laissé (leîmma) de la fraction contient les termes d'un rapport numérique, celui de 256 à 243.* ». Les liens *desmôn* dont il est question ici ont été interprétés par les Anciens[12] comme des relations de proportionnalité.

Or, il est possible de visualiser d'une manière assez simple au moyen d'une table tous les nombres dont les anciens usaient pour lire rapidement les rapports harmoniques nécessaires au calcul des moyennes arithmétiques et harmoniques destinées à « encadrer » la moyenne géométrique entre chacun des sept nombres platoniciens constitutifs de l'âme du monde.

1
2 3
4 9
8 27

Dans son édition de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase, Janine Bertier propose, à la fin de sa propre introduction[13] , des « repères pour la construction de l'échelle harmonique de l'âme du monde », où elle donne une reconstitution de la table numérique en question. Théon de Smyrne a sans aucun doute eu aussi recours à la même table.

1	**2**	**4**	**8**	16	32	64	128	**256**	512...	(etc. doubles selon l'horizontale)...
	3	6	12	24	48	96	192	384	642...	
		9	18	36	72	144	*288*	576...		
			27	54	108	216	432...			
				81	162	324	648...			
					243	486	972...			
						729				(etc. triples selon la diagonale descendante)...

La table s'écrit d'une manière très simple et quasi mécanique, par additions successives : 1+2=3 ; 2+4=6 ; 3+6=9 ; etc.), les rapports doubles se développant dans le sens horizontal de gauche à droite, les rapport triples dans le sens descendant selon la diagonale. Quant aux rapports *épitrites*, ils se lisent parallèlement à l'oblique de 4 vers 3 (en descendant d'une ligne, un chiffre décalé sur la gauche, on obtient ainsi des rapports correspondant à l'intervalle de quarte : 512 / 384 ; 256 / 192 ; 288 / 216 ; etc.). Les rapports *hémioles* se lisent parallèlement en remontant d'une ligne à la verticale comme de 3 vers 2 (on obtient ainsi des rapports

[11] Rapports doubles et triples constituant les deux *tétractys* du *lambda* figuré ci-dessous.

[12] Voir aussi : *Epinomis* 991 e ; et concernant l'importance prise par le concept platonicien de « lien » : P.-M. Schuhl, ΔΕΣΜΟΣ, in M*élanges de philosophie grecque à Mgr Diès*, éd. Vrin, Paris 1956.

[13] Voir Nicomaque de Gérase, *Introduction Arithmétique*, Introduction, traduction et notes de J. Bertier, éd. Vrin, Paris 1978, p. 39-51.

correspondants à l'intervalle de quinte). Quant aux rapports de « plus un huitième », ils se lisent parallèlement à l'oblique de 9 vers 8, c'est-à-dire un chiffre décalé à droite en sautant une ligne vers le haut (on obtient ainsi les *épogdes* ou rapports correspondant à l'intervalle d'un ton : 243 / 216 ; 216 / 192 ; 81 / 72 ; 72 / 64 ; etc.).

Les chiffres intercalés entre les nombres du *lambda* initial, par lequel on représente les deux *tétractys* des doubles (1, 2, 4, 8) et des triples (1, 3, 9, 27), étaient ainsi chaque fois la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique, meilleur encadrement par deux nombres entiers de la moyenne géométrique (ou proportionnelle), c'est-à-dire de la racine carrée du produit des deux nombres (ou termes) entre lesquels on veut la calculer[14].

6
8 9
9 12
12 **18**
16 27
18 36
24 **1** **54**
32 **2** **3** 81
36 **4** **9** 108
48 **8** **27** **162**

Mais, seule la moyenne géométrique peut être dite au sens propre « proportion », comme l'écrit Théon de Smyrne, en suivant Adraste[15], parce qu' « elle surpasse l'un des extrêmes et est surpassée par l'autre du même rapport », tandis que la moyenne arithmétique d'une part « surpasse l'un et est surpassée par l'autre du même nombre », et que l'harmonique d'autre part, « c'est seulement d'une même fraction de chacun d'eux qu'elle surpasse l'un et est surpassée par l'autre ».

Luc Brisson[16] a pris la peine de calculer encore tous les nombres à intercaler entre ceux du deuxième *lambda*, pour construire le *lambda* dont la branche droite s'échelonne de $384 (= 6 \times 64)$ à $10368 (= 162 \times 64)$, nombres donnés justement par les commentateurs[17] pour exprimer avec des rapports de nombres entiers l'harmonie musicalement réalisable (un ton, une octave, une quinte, une octave et encore deux octaves,) correspondant au mélange numérique du démiurge platonicien[18].

[14]Par exemple, la moyenne géométrique entre 6 et 12, racine carrée de $6 \times 12 (= \sqrt{72})$ est un nombre compris entre 8 et 9. La moyenne géométrique entre 6 et 18 , racine carrée de $6 \times 18 (= \sqrt{108})$ est un nombre compris entre 9 et 12, et ainsi de suite.

[15]Cf. éd. Hiller, II 106.

[16]Cf. L. Brisson, *Le Même et l'autre dans la structure ontologique du Timée de Platon* (1974, rééd. 1997).

[17]Par exemple Théon de Smyrne, éd. Hiller II 93,2-6.

[18]Voir aussi : Delattre J., « *Alogon, eulogon, analogôs* chez deux philosophes médioplatoniciens : Plutarque et Théon de Smyrne », *En deçà et au delà de la ratio*, V. Naas (dir.), Travaux et recherches Lille 3, 2004, 115-126.

Mais pour revenir au lien de proportionnalité, voici justement comment Théon de Smyrne[19] cite l'*Epinomis*, en l'attribuant à Platon :
« Platon pour sa part croit, semble-t-il, que l'unique cohérence des savoirs mathématiques est celle qui provient de la proportion. Dans l'*Epinomis*, en effet, il dit[20] : « *Toute figure, toute échelle numérique, toute combinaison en matière d'harmonie et de révolution des astres, doivent faire voir clairement à celui qui apprend avec méthode que la proportion*[21] *qu'ils offrent tous est unique. Or cela apparaîtra avec évidence si l'on apprend ce que nous disons en le considérant correctement*[22] *; en effet, on verra clairement que tous ont par nature un lien unique*[23].»
Le lien unique entre tous les savoirs rationnels est ainsi à la fois la condition et la conséquence d'un apprentissage réussi. Ce lien se voit, il se donne comme une évidence, pour peu qu'on réussisse à apprendre avec méthode et correctement géométrie, arithmétique, harmonie et astronomie, tout le cycle des savoirs mathématiques, objets de l'enseignement de professeurs médioplatoniciens comme Nicomaque de Gérase ou Théon de Smyrne. Certes, de mécanique, d'architecture, il n'est guère question, de biologie et de médecine encore moins, ces sciences étaient loin encore d'être reçues au « cycle des arts libéraux », comme si Vitruve était encore inconnu, et qui plus est, la démarche de critique systématique, menée par le médecin pyrrhonien Sextus Empiricus, philosophe et médecin, contre toutes les disciplines objets d'enseignement dogmatique au IIe siècle : lettres et rhétorique, géométrie et arithmétique, astrologie et musique[24]. Toutefois, si l'objectif de *la recherche du lien naturel*, en quoi consiste selon Théon de Smyrne la proportion, est ce qui peut et doit unifier tous les savoirs scientifiques, on comprendra mieux alors la persévérance, voire l'entêtement, des pythagoriciens anciens et nouveaux dans leur effort sans cesse recommencé pour déterminer toutes les formules possibles de calcul des moyennes arithmétique, géométrique et harmonique, les unes par rapport aux autres[25]. L'ensemble des dix médiétés transmises par les textes anciens pouvant s'exprimer grâce à la notation littérale moderne[26], voici comment, si l'on pose $a<b<c$, on écrira les différentes médiétés :

[19] Cf. *De ce qui est utile du point de vue scientifique pour lire Platon*, éd. Hiller, *Expositio*...II 84.7.

[20] *Epinomis* 991 e. Ce texte est plutôt considéré aujourd'hui comme ayant été rédigé par Philippe d'Oponte, le secrétaire de Platon, après la disparition de ce dernier.

[21] Théon écrit *analogían*, tandis que l'auteur de l'*Epinomis* n'avait écrit que *homología*. Cela montre à quel point le rapport de proportion s'est imposé, dans l'interprétation médioplatonicienne, comme une évidence.

[22] Théon cite : *orthôs emblépon*, là où l'auteur de l'*Epinomis* avait écrit : *eis hèn blépon* : " en regardant vers l'un ", insistant plus sur la démarche de connaissance (la recherche du lien et du rapport de proportionnalité) que sur l'objet lui-même (l'unité ainsi mise en évidence) à connaître.

[23] Ce sera donc la saisie et la découverte de ce « lien unique » qu'en recherchant l'harmonie universelle, on s'efforcera d'atteindre.

[24] Voir la nouvelle traduction des petits traités de Sextus Empiricus (*Adversus Mathematicos* I à VI) *Contre les professeurs*, éd. du Seuil, 2002, sous la direction de P. Pellegrin.

[25] Voir Delattre J., « Rapports numériques et harmonie en Grèce ancienne : néopythagorisme et médioplatonisme aux Ier et IIe siècles de notre ère », *Contribution à une approche historique des mathématiques*, Publication de l'IREM de Nantes, 1999, p. 293-314..

[26] Nous nous appuyons pour ce faire sur la note explicative, p. 1387 dans *Les Présocratiques*, éd. J.-P. Dumont, La Pléiade, 1988.

	arithmétique	$\frac{c-b}{b-a} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$	$ma = \frac{a+c}{2}$
Pythagore	géométrique	$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$	$mg^2 = ac$
	harmonique	$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{a}$	$mh = \frac{2ac}{a+c} = mg^2.\frac{1}{ma}$
	subcontraire de		
Hippase et	l'harmonique	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$	$\frac{1}{mh}$
Archytas[a]	cinquième	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b}$	$\frac{1}{mg}$
	sixième	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}$	$\frac{1}{mg}$
	septième[b]	$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a}$	
Simos Myonide et	huitième	$\frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a}$	
Euphranor[c]	neuvième	$\frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a}$	
	dixième	$\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$ ou $c = a + b$[d]	

[a]Selon Jamblique, *Commentaire à l'Introduction arithmétique de Nicomaque*, 116.1. Tandis que selon Proclus, c'est Eudoxe qui serait l'auteur de l'ajout de ces trois autres médiétés (*Commentaire au premier livre des Eléments d'Euclide*, p. 59).

[b]Cf. Nicomaque de Gérase, trad. J. Bertier, éd. Vrin 1978, p. 138, pour les quatre dernières médiétés.

[c]Voir *Les Présocratiques*, p. 555.

[d]Par symétrie on pourrait encore en ajouter deux, égales à c/b ; mais les auteurs se limitent à dix médiétés, y compris Ozanam dans son *Dictionnaire mathématique*. Voir M. Spiesser, *Histoire de moyennes*, IREM de Toulouse (1997), pp. 28-34.

Toutes ces abstractions semblent bien éloignées de l'harmonie musicale dont elles prétendent pourtant émaner, et s'apparentent plutôt à une sorte de jeu mathématique.

Quant à la saisie ou la compréhension du lien intelligible proportionnel, elle ne sera en réalité possible que dans une vue d'ensemble, attitude philosophique fondamentale qu'il conviendra de faire acquérir au lecteur cultivé ou à l'apprenti philosophe, par l'intermédiaire d'exercices répétitifs de calcul harmoniques ou de correspondances arithmo-géométriques plus ou moins fastidieuses[27].

3) L'analogie comme " raisonnement levier " de la cosmologie est-elle un instrument scientifique ou bien un tremplin philosophique ?

Relisons maintenant une page étonnante du livre III sur l'astronomie de Théon de Smyrne[28].

[27]Voir en particulier chez Théon de Smyrne la fin du livre II sur la musique, et les « démonstrations » du ch. 26 du livre III sur l'astronomie.

[28]Cf. *De ce qui est utile du point de vue scientifique pour lire Platon*, éd. Hiller, Expositio...III 126.

...La hauteur de la plus grande montagne est voisine de la 8000e partie du diamètre total de la Terre. Si nous fabriquons alors une sphère d'un diamètre d'un pied, puisque l'intervalle d'un doigt est rempli par environ 12 diamètres de grains de mil en longueur (plus encore un demi), le diamètre d'un pied de la sphère construite se remplira en longueur de 200 diamètres de grains de mil ou même d'un peu moins. En effet, le pied compte 16 doigts ; le doigt se remplit de 12 diamètres de grains de mil ; et 12 fois 16 font 192. Donc la 40e partie du diamètre d'un grain de mil <est plus grande que la 8000e partie du diamètre d'un pied>, car 40 fois 200 égalent 8000. Mais la montagne la plus haute [mesurée] à la verticale, il a été montré qu'elle était à peu de chose près la 8000e partie du diamètre de la Terre ; de sorte que la 40e partie du diamètre d'un grain de mil aura un rapport plus grand avec le diamètre d'un pied de la sphère, et donc aussi le volume (A) constitué à partir de la 40e partie du diamètre de grain de mil avec le volume (B) semblable constitué à partir du diamètre d'un pied, comparé avec le [rapport du] volume (C) constitué à partir de la [hauteur] verticale de dix stades avec le volume (D) semblable constitué à partir du diamètre de la Terre. Or le volume sphérique constitué à partir de la 40e partie d'un diamètre de grain de mil sera la 64000e partie de tout le grain ; et la montagne sphérique [constituée] à partir de la verticale de dix stades vaut à peu près <524> stades cubiques ; et toute la Terre, calculée dans sa forme sphérique contient en stades cubiques <à peu près 2,7.1014> ... [x] myriades de nombres troisièmes, [y] myriades de nombres deuxièmes, [x'] myriades de nombres premiers et encore [y'] myriades et 1/3 de stade."

Ce très grand nombre a été reconstitué différemment par T. H. Martin, le premier éditeur de la partie astronomique de l'ouvrage de Théon de Smyrne, et par J. Dupuis, son premier traducteur en français. Bien consciente que c'est moins le résultat exact que la démarche par laquelle on peut l'obtenir et l'exprimer qui est intéressante ici[29], nous avons préféré laisser au nombre une forme indéterminée, étant donné que des lacunes malencontreuses dans les différents manuscrits ne semblent pas permettre de le préciser davantage[30].

On peut, semble-t-il, formaliser ainsi le problème.

Soient les cinq sphères suivantes :

- *1ère sphère* (A), de diamètre d1 = 1/40e de diamètre de grain de mil ce qui est un peu plus grand que 1/8000e de pied (40 fois 200 = 8000)
- *2ème sphère*, de diamètre d2 = 1/200e de pied ; grain de mil entier ce qui est environ 64000 fois plus gros (403 = 64000)
- *3ème sphère* (B), de diamètre d3 = 1 pied, instrument de l'opération ; sachant qu'un doigt contient 12 grains 1/2 environ en largeur, et qu'un pied contient 16 doigts et donc environ 200 grains, elle sera donc 8 millions de fois plus grosse (2003) qu'un grain de mil, et 512 milliards de fois plus grosse que la sphère 1.

[29] On notera aussi que le « calcul raisonnable » des distances et tailles des astres, chez Aristarque comme aussi chez Archimède dans l'Arénaire, aboutit toujours à un encadrement voire à une grossière approximation, et non à une mesure vraiment exacte, au sens où nous l'entendrions aujourd'hui, comme d'ailleurs la fraction « laissée » (leîmma) platonicienne dans le *Timée* donnée sous la forme d'un rapport et non d'un nombre.

[30] Dans un article "Sur Théon de Smyrne" des *Mémoires scientifiques* II, éd. J.-L. Heiberg et H. G. Zeuthen (Toulouse, Paris 1912), P. Tannery conteste la reconstitution de T. H. Martin et la correction de J. Dupuis, en faisant remarquer que les manuscrits témoignent d'une copie incomplète et fautive, transcrivant mal les symboles des myriades et oubliant de noter leurs nombres qui auraient figuré au dessus de la ligne (?) ; cf. en particulier, p. 464-465.

-*4ème sphère* (C), de diamètre d4 = 10 stades (= 6000 pieds), hauteur de la montagne la plus élevée, ce qui correspond à environ 1/8000e du diamètre terrestre et donne un volume sphérique de 103 . 7 1/3 / 14, environ 524 st3.
-*5ème sphère* (D),de diamètre d5 = 80182 stades, 8000 fois plus grand que d4 (et 48 millions de fois plus grand que d3) ; c'est la Terre dont le volume calculé avec la formule d'Archimède donnerait, selon les calculs de J. Dupuis, corrigeant ceux de H. T. Martin, 270 025 043 508 297 et 11/21 stades cubiques, disons environ 2,7 . 1014 st3.

Sachant que la proportion de 1/8000e est la même pour d1 et d3, et pour d4 et d5, on peut constater que le rapport de grandeur entre les volumes des deux premières sphères (64000) est amplifié encore considérablement si l'on compare les sphères 1 et 3 (512 milliards) ; mais, entre les sphères 4 et 5, le rapport de grandeur entre les volumes sera du même ordre qu'entre les volumes des sphères 1 et 3, et c'est en cela que la sphère 3 est « instrument de l'opération », car elle permet de concevoir l'ordre de grandeur d'un rapport de volumes qu'il est autrement impossible de se représenter.

Or, du fait de la forme non sphérique (mais plutôt conique) de la montagne, son volume comparé à celui de la sphère entière de la Terre, est encore beaucoup plus négligeable que le volume de la sphère 1 par rapport à celui de la sphère construite 3.

Nous nous trouvons donc devant une analogie complexe où la sphère hypothétique (ou construite) d'un pied de diamètre joue ainsi le rôle d'instrument de conceptualisation, nous aidant à nous représenter, en comparant la fraction de grain de mil non seulement au grain de mil, 64 mille fois plus gros, mais à la sphère d'un pied, 512 milliards de fois plus grosse, et à comprendre plus facilement quel est le rapport de proportion de la montagne (plutôt conique) à la sphère entière de la Terre[31].

Or tout ce raisonnement ne semble en tout cas nullement viser une mesure précise et exacte, pas plus d'ailleurs que dans l'*Arénaire* Archimède[32] ne le faisait non plus, cherchant surtout à montrer (en arrondissant aux maxima supérieurs chacune des dimensions envisagées) que le calcul des volumes en grains de sable était possible grâce à son système d'écriture de très grands nombres[33], d'où justement les hésitations et les ratures des copistes sur les différents manuscrits qui ont transmis le texte de Théon de Smyrne.

D'autres textes d'auteurs médioplatoniciens nous permettraient de confirmer encore l'assertion selon laquelle l'analogie, même explicitement utilisée comme instrument d'un raisonnement d'allure scientifique, et malgré son origine géométrique indéniable, reste pourtant d'abord, pour le philosophe, un moyen de fonder solidement le « regard d'en haut » qu'il

---

[31]Les sphères ayant entre elles le rapport des cubes de leurs diamètres, comme le rappelle Archimède dans l'*Arénaire*, ce rapport sera de mille à 515 mille milliards. Ce que nous voulions faire remarquer ici c'est comment la sphère de 10 stades de diamètre (volume C) joue en fait, dans le raisonnement analogique portant sur les rapports entre volumes sphériques, un même rôle instrumental (de moyen proportionnel en quelque sorte) que celle d'un pied de diamètre (volume B) : Le volume A est au volume B, comme le volume C est au volume D, sachant que la plus haute montagne est encore bien plus petite que le volume sphérique C.

[32]Archimède, *L'Arénaire*, éd. et traduction de C. Mugler.

[33]Cf. Delattre J., « Nombre et astronomie : mesure de la Terre, mesure de l'Univers dans la Grèce antique », *La mémoire du nombre*, Publication de l'IREM de Caen, 1997, p. 485-506.6

cherche à prendre[34] et la vue d'ensemble qui lui est nécessaire pour la saisie intellectuelle de l'unité fondamentale et rationnelle de la réalité multiple et diverse.

Nous avons ainsi cherché à mettre en évidence un fonctionnement paradoxal et réversible de l'analogie dans les savoirs élémentaires d'arithmétique, de géométrie et d'harmonie, mis de cette manière en lien : peu soucieux de contribuer au développement de la connaissance scientifique de leur temps, ces penseurs platoniciens semblent, en effet, s'être surtout efforcés de garantir la cohérence et l'unité de divers savoirs admis ou transmis, et en particulier de vérifier leur accord avec l'enseignement philosophique de Platon.

Bibliographie

Archimède, *L'Arénaire*, éd. et traduction de C. Mugler.

Jamblique, Commentaire à l'Introduction arithmétique de Nicomaque, 116.1.

Nicomaque de Gérase, *Introduction Arithmétique*, Introduction, traduction et notes de J. Bertier, éd. Vrin, Paris 1978.

Platon, *Gorgias* 463 e-465 e, trad. A. Croizet et L. Bodin, 1966 ; voir aussi Monique Canto, éd. GF Flammarion.

Les Présocratiques, éd. J.-P. Dumont, La Pléiade, 1988.

Proclus, *Commentaire au premier livre des Eléments d'Euclide*, p. 59 trad. Ver Eecke.

Sextus Empiricus (*Adversus Mathematicos* I à VI) *Contre les professeurs*, éd. du Seuil, 2002, P. Pellegrin (dir.).

Théon de Smyrne, *De ce qui est utile du* point de vue scientifique pour lire Platon, *éd. Hiller*, Expositio...1878, rééd. 1971 ; éd. et trad. Dupuis, 1892, rééd. Bruxelles 1966 ; nouv. trad. à paraître J. Delattre.

Brisson L., Le Même et l'autre dans la structure ontologique du Timée de Platon (1974, rééd. 1997).

Delattre J., " *Alogon, eulogon, analogôs* chez deux philosophes médio-platoniciens : Plutarque et Théon de Smyrne ", *En deça et au delà de la ratio*, V. Naas (dir.), Travaux et Recherches, Lille 3, 2004, p. 115-126.

Delattre J., " Rapports numériques et harmonie en Grèce ancienne : néopythagorisme et médio-platonisme aux Ier et IIe siècles de notre ère ", *Contribution à une approche historique des mathématiques*, Publication de l'IREM de Nantes, 1999, p. 293-314.

[34]Cf. P. Hadot, Qu'est-ce que la philosophie antique ?, Paris, 1995, p. 314-316.

Delattre J., "Nombre et astronomie : mesure de la Terre, mesure de l'Univers dans la Grèce antique", *La mémoire du nombre,* Publication de l'IREM de Caen, 1997, p. 485-506.

Hadot P., *Qu'est-ce que la philosophie antique ?*, Paris, 1995.

Schuhl P.-M., ΔΕΣΜΟΣ, in *Mélanges de philosophie grecque à Mgr Diès*, éd. Vrin, Paris 1956.

Spiesser M., *Histoire de moyennes*, IREM de Toulouse (1997), pp. 28-34.

Tannery P., "Sur Théon de Smyrne" des *Mémoires scientifiques* II, éd. J.-L. Heiberg et H. G. Zeuthen (Toulouse, Paris 1912).

La fonction de l'analogie dans la Dynamique de Leibniz

Anne-Lise Rey
Université de Lille 1
Anne-Lise.Rey@univ-lille1.fr

Il y a différents usages de l'analogie dans la pensée de Leibniz et le terme est même explicitement thématisé pour évoquer *l'analogue de l'âme* qui désigne la monade, le concept fondamental de la métaphysique leibnizienne.

Ces usages, au nombre de trois, peuvent être déclinés comme des marques méthodologiques de la pensée de Leibniz, voire comme des marques méthodologiques distinctives. Les textes consacrés à la Dynamique, définie au sens strict comme science de la puissance et de l'action (on fait ainsi référence au texte fondateur de la *Dynamica de potentia* de 1689-1690) constituent le corpus au sein duquel il est possible de repérer ces différents usages.

Deux d'entre eux relèvent de la méthode, quant au troisième, il participe à la formulation de la définition d'un objet théorique.

Un premier usage que l'on peut qualifier de *dispositif méthodologique* met en équivalence des hypothèses de nature différente. Ainsi, par exemple, Leibniz propose, dans l'*Essay de Dynamique* de 1692, d'établir une relation entre un exemple chiffré, sa reformulation dans un langage par lettres que Leibniz identifie au "style des géomètres" et enfin le recours à un vocabulaire métaphysique.

Dans ce premier usage, ce que l'on met en relation ce sont des expressions différenciées d'une même réalité qui correspondent à la conception de l'analogie comme analogie d'attribution c'est-à-dire, pour paraphraser Aristote, c'est l'idée que l'être se dit en plusieurs sens.

On observe alors à l'analyse de ce texte, la fécondité de ce dispositif dans la mesure où l'analogie incite à penser le dépassement du principe de conservation de la force afin d'appréhender ce qui serait "le plus réel". Sans la nommer, l'équivalence des hypothèses conduit à l'estimation de l'action motrice, elle n'est donc pas seulement la reformulation dans un autre langage de la réalité, cette équivalence des hypothèses rend compte d'une croissance dans l'intelligibilité du réel. On peut ainsi lire cette équivalence des hypothèses comme un chemin qui conduit à une plus grande intelligibilité de ce qui est réel dans le mouvement.

Un deuxième usage correspond à une conception classique de l'analogie : Leibniz utilise alors l'analogie comme une réponse à l'impossibilité de produire une démonstration. L'analogie est, en ce cas, le moyen d'approcher, indirectement, ce qui échappe à la connaissance démonstrative, elle est un *mode d'expression simplificateur* et plus immédiatement compréhensible. C'est ainsi qu'il désigne la force ou tendance primitive à agir "comme une âme" ou " plutôt comme un analogue de l'âme" dans le texte de 1698 intitulé *De Ipsa Natura*.

Leibniz a également recours à un troisième usage qui correspond proprement à la définition de l'*expression* entendue comme la correspondance formelle entre des réalités hétérogènes : "une chose en exprime une autre quand il y a un rapport constant et réglé entre ce qui se peut dire de l'une et ce qui se peut dire de l'autre" écrit Leibniz dans une lettre à Arnauld (correspondant d'obédience cartésienne à qui il a envoyé les abrégés de son *Discours de Métaphysique*). Cette définition de l'expression correspond à la définition de l'analogie mathématique qui ne se soucie pas des caractères communs aux termes comparés mais de la structure existant entre les termes.

Si on s'en tenait à cette acception du troisième sens de l'analogie, on pourrait à bon droit se demander dans quelle mesure elle se distingue radicalement d'une figure méthodologique et de quelle manière elle constitue un objet théorique.

C'est la raison pour laquelle il faut expliciter ce qu'est l'expression dans la pensée de Leibniz, plus exactement dans quelle mesure l'expression s'apparente à la perception. Or, précisément Leibniz définit la perception comme l'action propre à toute substance par laquelle cette substance exprime l'univers selon son point de vue. Autrement dit, l'analogie est objet de l'expression ou encore de la perception, c'est-à-dire que la perception est l'action par laquelle j'exprime des relations (ou correspondances réglées) entre toutes les substances de l'univers selon mon point de vue.

L'enjeu de cette précision est de se demander si Leibniz a un usage univoque de l'analogie sommairement définie comme une mise en relation entre des entités hétérogènes ou bien s'il produit en acte, autrement dit dans l'utilisation même de la figure de l'analogie, un nouveau sens. Notre travail a donc consisté à procéder à un repérage des usages explicites et implicites de l'analogie pour produire une définition comme écart.

Comment penser ces différents usages de l'analogie ? Faut-il considérer que l'analogie travaille selon des régimes différents dans les textes de Leibniz sans forcément entretenir de relations entre eux ou bien faut-il au contraire penser qu'il y a une relation entre l'analogie comme méthode et l'analogie comme objet de la perception ?

Notre hypothèse de lecture fut que l'analogie devient explicitement heuristique, c'est-à-dire dotée d'une réelle fécondité à partir du moment où dans un même texte son statut change, autrement dit à partir du moment où elle passe de méthode à objet théorique. Les textes consacrés à la Dynamique ont constitué, en ce sens, un terrain privilégié pour observer ce changement et en particulier le second *Essay de Dynamique* de 1699-1701.

Quelques références :

Textes de Leibniz :

-"Dynamica de potentia" (1689-1690) in Mathematische Schriften, vol.6, éd. Gerhardt, rééd. Olms, 1971, pp.281-514.

-"Essay de Dynamique" (1692) in Leibniz et la Dynamique en 1692. Textes et commentaires. éd. P. Costabel, Paris, Vrin, 1981.

-"De Ipsa natura"(1698) in G.W. Leibniz, Opuscules philosophiques choisis, traduits du latin par Paul Schrecker, Paris, Vrin, 1978 (1˚ éd. 1966), pp. 93-112.

-"Essay de dynamique sur les lois du mouvement où il est montré qu'il ne se conserve pas la même quantité de mouvement, mais la même force absolue, ou bien la même Quantité de l'Action Motrice" (1699-1701) in Mathematische Schriften, vol.6, éd. Gerhardt, rééd. Olms, 1971, pp. 215-231.

-Correspondance entre Leibniz et De Volder (1698-1706) in Die philosophischen Schriften, vol.2, éd. Gerhardt, rééd. Olms, 1996, pp. 139-283.

Textes critiques :

Y. Belaval, Leibniz critique de Descartes, Paris, Gallimard, 1960.

M. Fichant, Science et métaphysique dans Descartes et Leibniz, Paris, PUF, Epiméthée, 1998.

F. Duchesneau, La dynamique de Leibniz, Paris, Vrin, 1994.

Analogies et lois chez Christiaan Huygens

Fabien Chareix
Paris IV - Sorbonne

Présentation :

La philosophie naturelle, au XVIIe siècle, n'avait pas toujours les moyens de vérifier en nature l'exactitude de ses intuitions. Les objets qui, par un aspect ou par un autre, échappaient à une mesure complète, devaient tout de même être rapportés à une loi. C'est dans ce cadre qu'une pratique de l'analogie a pu se développer dans le cadre de l'activité savante elle-même. Nous verrons comment cette pratique a pris un sens particulier dans la physique de Descartes, chez qui la comparaison, forme physique de l'analogie formelle, tient lieu d'argument en bien des occasions. Nous verrons aussi évoluer cet usage chez Christiaan Huygens, pour qui l'analogie devient une manière de produire l'idée de rapports et de lois communs à des phénomènes naturels variés. L'analogie, alors, n'est plus ce qui se substitue à la mesure et à la loi, mais ce qui permet d'y avoir accès.

Maxwell et les « analogies physiques »

Stéphane Devernay
Université de Lille 1
Bernard Maitte
Université de Lille 1
bernard.maitte@univ-lille1.fr

Nous voulons dans cette intervention contextualiser ce que Maxwell appelle « analogies physiques ». Pour cela, l'un d'entre nous (Bernard Maitte) s'attachera à rappeler brièvement à quelles conceptions, physiques et mathématiques, en était arrivée la notion d'éther avant d'étudier leur extension à l'électromagnétisme, l'autre (Stéphane Devernay) mettra en évidence la fécondité de la notion de lignes de forces - dans le magnétisme, l'électricité, la chaleur...

1- L'éther

1-1 L'éther de Fresnel

En septembre 1821, A. Fresnel se résout à introduire le concept de vibrations transversales de la lumière pour expliquer la polarisation. Désormais, il faut se pencher sur les étranges propriétés mécaniques du fluide éthéré. Fresnel le fait succinctement : *« Les géomètres qui se sont occupés des vibrations des fluides élastiques [les ont considérés comme] une réunion de petits éléments... susceptibles de se condenser ou de se dilater et juxtaposés ; tandis que, dans la nature, les fluides élastiques sont composés sans doute de points matériels séparés par des intervalles plus ou moins considérables relativement aux dimensions des molécules »*.

Poisson estime cette proposition *« inadmissible et mécaniquement impossible »*. Il s'ensuit une violente polémique, Fresnel estimant que son ancien professeur a une conception trop mathématique de l'éther *« vous considérez les fluides composés de petits éléments contigus et compressibles... contiguïté qui n'existe pas »* (1823). En 1825, pour expliquer l'aberration des étoiles, il est néanmoins obligé de considérer que *« l'éther passe librement au travers du globe »*. La conception de Fresnel est mécanique : il veut décrire le monde tel qu'il est. Le problème de l'éther ainsi posé va voir des mathématiciens, des mécaniciens, des spécialistes de l'électricité tenter de le résoudre.

1-2 L'éther mathématique

Dans la filiation de Laplace, Navier, en 1825, considère la matière comme composée de molécules régulièrement disposées dans les trois directions de l'espace. Cette conception lui permet d'obtenir les équations de propagation de vibrations dans les solides.

La même année, Cauchy étudie les corps isotropes et leurs déformations. Il considère que la matière est continue, fait dériver de cette hypothèse des équations qui paraissent mieux s'adapter aux effets constatés que celles de Navier. Pourtant, la mode étant alors aux atomes, cette approche est estimée *« vieillotte »*. En 1827, Cauchy l'abandonne donc au profit d'une matière moléculaire et obtient des équations moins fécondes. En 1830, il les applique à l'éther lorsque les vibrations sont dans le plan de polarisation, en 1837 pour des vibrations perpendiculaires au plan de polarisation. Dans les deux cas, le coefficient d'élasticité calculé de l'éther est peu crédible.

En 1839, en considérant que des vibrations de fréquences différentes ont des vitesses de propagation différentes, Cauchy calcule que le module de compression de l'éther est négatif : si il est comprimé, il se dilate et réciproquement. En 1842, Cauchy peuple l'espace de molécules qui se repoussent proportionnellement à l'inverse de la distance à la puissance quatrième. Il calcule alors que dans une portion d'espace ne contenant que quelques molécules de matière, les molécules d'éther se comptent par millions. Tous ces résultats paraissent peu crédibles aux physiciens, mais les travaux de Cauchy sont connus en Angleterre.

1-3 Voies des physiciens

- En mécanique tout d'abord, James Mac Cullagh, en 1839, fait dériver de Cauchy que l'éther est un milieu élastique agité de tourbillons. Stokes (1845) estime que l'éther doit être très rigide pour que la vitesse de propagation de la lumière soit énorme, mais il doit être aussi très fluide pour expliquer que la terre et les planètes le traversent sans être freinées. Ce milieu ressemblerait à la *poix de cordonniers*, qu'une balle de plomb posée dessus traverse très lentement et qui transmet des vibrations rapides...
- En électricité, Oersted (1819) s'inscrit dans le courant de la *« Naturphilosophie »* et cherche à mettre en évidence le *« conflit électrique »* qui doit animer l'espace. Il fait dépendre de deux forces répandues dans l'espace combinaisons chimiques, chaleur, lumière, électricité, magnétisme. Se saisissant de ces travaux, Ampère (1826) commence par considérer que l'éther est analogue à un fluide dans lequel s'opèrent des décompositions et recompositions instantanées, avant qu'il identifie éther lumineux et éther électrique, constitués de petits circuits électriques animés par une perturbation électrique.

2- Lignes de force et analogies : liens et rôles dans la construction des concepts en électromagnétisme chez Faraday, Thomson et Maxwell.

L'histoire de l'électromagnétisme est marquée par le recours régulier à des analogies par ceux qui ont contribué au développement de cette discipline. Faraday considère, par exemple, des analogies qualitatives entre :

- une ligne de force magnétique et un rayon de lumière
- les lignes de force magnétique et les lignes de flux de chaleur
- une ligne de force magnétique et la direction d'une onde mécanique

Thomson réalise des analogies mathématiques partielles ou totales entre des phénomènes physiques différents :

- la force électrique et le flux de la chaleur
- les forces électriques et magnétique et les contraintes dans un solide élastique
- les lignes magnétique et électrique et les lignes de courant fluide

Maxwell construit des analogies physiques :

- force électrique et magnétique et vitesse d'un fluide incompressible
- électromagnétisme et vortex, roues libres ou engrenages

La ligne de force, introduite en 1831 par Faraday pour interpréter sa découverte de l'induction de courants, a joué pour ces trois physiciens un rôle important comme élément renfonçant ou même justifiant certaines de ces analogies.

Je me propose de montrer comment la ligne de force s'est imposée à Maxwell comme élément indispensable à l'élaboration d'une théorie pour l'électricité et le magnétisme. L'utilisation de la ligne de force par Faraday et Thomson sera abordée à travers l'influence qu'elle a eue sur Maxwell.

2-1 Comment le concept de ligne de force s'est-il imposé à Maxwell comme élément indispensable à l'élaboration d'une théorie pour l'électricité et le magnétisme ?

En 1854, Maxwell a 23 ans, il vient de terminer deuxième de l'examen de fin d'études de Cambridge. Il a devant lui un peu de temps pour lire. Il souhaite *« s'attaquer à l'électricité »*. Il demande conseil auprès de William Thomson, professeur de philosophie naturelle à Glasgow, avec qui il entretient une correspondance depuis quelques mois : *« dans quel ordre dois-je lire Ampère et Faraday ainsi que vos articles ? »* Nous ne disposons pas de la réponse de Thomson. Par contre, les notes de Maxwell sur ces lectures en électricité existent : qu'a-t-il consigné.

Il rappelle successivement les lois élémentaires d'attraction et de répulsion entre les corps électrisés, l'expression en $1/r^2$ et la définition d'une ligne de force : *« la ligne dont la direction coïncide toujours avec celle de la force »*. Ensuite, viennent les définitions des surfaces d'équilibre (aujourd'hui équipotentielles), du travail, de la tension électrique, de la force électromotrice, de la capacité électrique.

La ligne de force est pour Maxwell, dès l'entame de son étude de l'électricité et du magnétisme, un concept à part entière qui semble primer sur celui de potentiel.

Bien sûr, les œuvres de Faraday placent la ligne de force au cœur des théories explicatives des phénomènes électromagnétiques et certains articles de Thomson y font référence. Ces travaux ont évidemment influencé Maxwell. Pourtant, cette adoption résulte d'un choix de la part de Maxwell. Ecoutons-le comparer la vision ampérienne des phénomènes électromagnétiques et celle de Faraday, toujours dans une lettre adressée à Thomson, dont l'objet est encore son *« apprentissage »* des théories électromagnétiques.

« Alors j'ai essayé de comprendre la théorie de l'attraction des courants mais, bien que je pouvais voir la manière dont les effets pouvaient être déterminés, je n'étais pas satisfait avec la forme de la théorie qui traite des courants élémentaires et de leurs actions réciproques, et je ne voyais pas comment une théorie générale quelconque pouvait en être déduite... Main-

tenant, je vous ai entendu parlé des « lignes de force magnétique » et Faraday semble en faire un grand usage, mais d'autres préfèrent la notion d'attractions directes entre courants. C'est alors que j'ai pensé que, puisque chaque courant produit des lignes magnétiques et se comporte d'une manière déterminée par les lignes qui le traversent, quelques chose pouvait être fait en considérant la « polarisation magnétique » comme une propriété du 'champ magnétique' et en développant les idées géométriques en accord avec cette conception ».

Le choix de Maxwell d'adopter les lignes de force s'appuient sur :

– une préférence de forme
– une possibilité de construire une théorie générale en développant les idées géométriques en accord avec cette conception.

2-1-1 L'adoption de la ligne de force : un choix d'ordre esthétique ?

Le goût de Maxwell pour les problèmes de géométrie n'est pas nouveau. En effet, on trouve dans les différents articles et autres manuscrits publiés par Maxwell à partir de 1846 une majorité de papiers ayant trait à des problèmes de géométrie ou faisant appel à la représentation de formes. On peut citer :

« Sur la description des formes ovales » en 1846

« Sur les courbes trifocales » en 1847

« Sur la théorie des courbes roulantes » en 1848

« Pour trouver la forme des bandes centrales vues en lumière polarisée dans les morceaux de verre non-recuits » en 1848

« Sur le caténaire » en 1849 dont l'objet est de trouver la forme d'un caténaire.

« Sur l'équilibre des solides élastiques » en 1850 contenant des diagrammes constitués de lignes isochromatiques, des lignes d'égale inclinaison.

« Sur la transformation des surfaces par pliage » lu devant la Société philosophique de Cambridge le 13 mars 1854.

Le choix de la ligne de force s'inscrit donc dans une continuité intellectuelle (tournure d'esprit ? Education ?). Ce choix conduira Maxwell à proposer un premier essai de théorie générale des phénomènes électromagnétiques dans l'article *« On Faraday's lines of force »* publié en 1856. Les méthodes qu'il emploie (découpage de l'espace, quadrillage) sont très semblables à celles qu'il avait adoptées dans *«Sur la transformation des surfaces par pliage»*.

Dans l'article *« On Faraday's lines of force »*, la ligne de force est le fondement d'une analogie entre le mouvement constant d'un fluide incompressible et divers phénomènes électromagnétiques.

2-1-2 La ligne de force au cœur des analogies qui ont influencé Maxwell

Dans cette même lettre, Maxwell confie à Thomson ses premières impressions inspirées de sa découverte des théories électriques et magnétiques (il a maintenant lu Thomson puis Faraday, puis Ampère, puis Weber) :

« J'ai étudié les principes fondamentaux de l'électricité de tension assez facilement. J'en fus grandement aidé par l'analogie de la conduction de la chaleur, qui je crois est de votre invention en tout cas je ne l'ai trouvée nulle par ailleurs ».

Maxwell fait allusion à l'article de Thomson : *« Sur le mouvement uniforme de la chaleur dans les corps solides homogènes, et sa connexion avec la théorie mathématique de l'électricité »*.

Dans cet article, Thomson réalise une analogie entre le flux de chaleur et la force électrique

$$F - dV/dn \quad \text{et} \quad J = k.Dt/dx \quad \text{avec} k = 1$$

Il met ainsi en correspondance température et potentiel, isothermes et équipotentielles. Il transfère à la théorie électrique un résultat de la conduction de la chaleur.

Au passage, il définit une ligne normale à la surface équipotentielle. Cette ligne n'a pas de fonction particulière dans l'article si ce n'est compléter et renforcer son analogie. Aux lignes de flux de chaleur, il associe donc une ligne de force électrique, suggérant peut-être malgré lui une transmission de la force électrique qui s'effectuerait de proche en proche à travers le milieu.

Il faut remarquer que cette ligne telle que définie par Thomson n'est pas nouvelle : Gabriel Lamé l'utilise dans l'un de ses articles sur les surfaces isothermes et d'ailleurs Thomson fait référence à cet article. Gauss (Journal de mathématiques pures et appliquées, 7, 1842) l'emploie aussi dans ses recherches magnétiques et dans son article sur les théorèmes généraux des forces attractives et répulsives. On la retrouve aussi chez Lagrange en mécanique des fluides (Mécanique Analytique) ou chez Poisson en magnétisme (Mémoire sur la théorie du magnétisme).

En soi, il n'est pas étonnant de retrouver ce concept dans divers domaines de la physique étant donné son adaptabilité et à sa connexion directe avec la fonction potentielle.

Thomson a bien résumé l'adaptabilité des lignes dans un article lu en 1852 à l'Association Britannique pour l'avancement de la science : *« Diagrams of lines of force ; to illustrate Magnetic Permeability »*.
« les figures 4, 5, 6, 7... illustrent les influences inductives de corps sphériques de différentes qualités, placés dans le courant uniforme d'un liquide sans frottements, ou des champs uniformes d'une force électrique ou magnétique ».

Maxwell s'est inspiré de ces analogies : il a écrit qu'il s'est inspiré des articles de Thomson de 1843 (analogie conduction - électricité) de 1847 (analogie solide élastique - magnétisme) et de 1850 (analogie magnétisme - hydrodynamique).

2-1-3 La ligne de force de Faraday : le symbole de la remise en cause de la théorie de l'action à distance.

Maxwell signale à plusieurs reprises dans sa correspondance ou dans ces articles qu'il n'apprécie pas la forme des théories électriques et magnétiques d'action à distance instantanée.

Ainsi à propos des travaux de Weber au sujet de l'interaction entre deux éléments de courants, il confie à Thomson qu'il n'a pas aimé en première impression cette façon de connecter l'électrostatique avec l'électrodynamique, l'induction... bien qu'il estime le travail de Weber.

Il y a deux raisons au rejet de cette théorie par Maxwell. Il les explique dans son article de 1856 *« On Faraday's lines of force »* :
- c'est une *« bonne chose d'avoir deux façons de voir un sujet, et d'admettre qu'il y a deux*

manières de le voir. Du reste, je pense que nous ne sommes pas en mesure actuellement de comprendre l'action de l'électricité, et je soutiens que le mérite principal d'une théorie temporaire est que cela peut guider l'expérimentation, sans enfreindre le progrès d'une théorie vraie quand elle apparaît».
- en vertu du principe de conservation de la force (énergie), la force d'attraction doit être une fonction de la distance uniquement.

La ligne de force est le symbole de la théorie concurrente dont l'initiateur est Faraday : *« au lieu de diriger son attention sur les points et sur les centres vers lesquels les forces sont dirigées et de considérer l'attraction en un quelque autre point seulement en référence à ces centres de force, Faraday traite la distribution des forces dans l'espace comme le phénomène premier... ».*

Maxwell la perçoit comme plus riche de possibilités et d'extensions. Son ambition est *« d'illustrer le caractère mathématique et l'utilité scientifique des lignes de force »* car la théorie de Faraday bien que déjà féconde présente encore quelques aspects vagues...

La ligne de force a donc séduit Maxwell pour des raisons d'ordre esthétique, des préférences de forme dans l'expression d'une théorie électromagnétique générale. La ligne de force a aussi représenté pour lui le symbole d'une théorie concurrente à celle de Weber qu'il considérait insuffisante dans sa forme et ne répondant pas à certaines considérations dynamiques. Enfin, la ligne de force s'est imposée à Maxwell car elle a stimulé et encouragé un certain nombre d'analogies entre divers domaines qui ont favorisé la construction d'un électromagnétisme où l'espace entre sources puisse intervenir de façon primordiale dans l'appréhension de ces phénomènes.

3- Les « analogies physiques » de Maxwell.

Ce qui précède montre que les physiciens et les mathématiciens de l'époque s'étaient habitués, pour résoudre les problèmes posés en physique à utiliser des images et à peupler l'espace d'êtres définis en fonction des effets qu'ils pouvaient produire de manière analogue à la matière.

Le travail de Maxwell va d'abord être d'assumer cette tradition. Dans *« On Faraday lines of forces »*, il écrit en 1855 : *« L'état actuel de la sciences de l'électricité ne semble pas particulièrement favorable à la spéculation. Les règles de la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs sont bien déduites analytiquement de l'expérience ; si des théories mathématiques partielles du magnétisme ont été établies, certaines expériences ne sont pas interprétées ; la théorie... de l'attraction des conducteurs a été décrite mathématiquement, mais elle n'a pas été reliée avec les autres parties de la science... nulle théorie générale ne permet de relier entre eux les phénomènes ». « Pour parvenir à cette interprétation générale, il faut d'abord se familiariser avec une énorme masse de connaissances... aussi vaut-il mieux trouver le moyen d'éclaircir et de simplifier les notions de base de chaque branche afin d'aboutir à une unification générale. Adopter pour ce faire une méthode mathématique serait perdre de vue le phénomène à expliquer et, même si nous parvenons à prévoir les conséquences des lois, nous n'élèverons pas notre compréhension ; adopter une méthode physique, c'est ne voir les phénomènes qu'à travers un écran et de manière partielle... Il faut donc adopter une méthode qui permette à l'esprit de s'appuyer sur les concepts physique - sans pour cela se lier à une théorie - ... pour développer une analyse mathématique qui ne s'égare pas dans de vaines subtilités ou se laisse entraîner au-delà des faits par* *des hypothèses séduisantes ». « Pour pouvoir nous appuyer sur les concepts physique sans nous enfermer dans une théorie, nous devons nous familiariser avec l'existence d'analogies physiques, c'est-à-dire des ressemblances partielles entre les lois d'une disciplines et celles d'une autre, de manière à ce que l'une permette d'éclairer l'autre... ».*

Pour expliquer ce que sont ces *« analogies physiques »*, Maxwell prend l'exemple de la lumière, que l'on peut représenter par des corpuscules si l'on veut traiter d'optique géométrique, par des ondes à vibrations perpendiculaires pour expliquer interférences et polarisation. Mais ni corpuscules, ni ondes ne peuvent expliquer seuls les propriétés de la lumière : ce sont des analogies physiques utiles pour développer une analyse mathématique rendant compte d'une classe de phénomène. Posant cette conception, Maxwell rompt avec l'habitude de vouloir décrire le monde en termes de mécanique. Il va pouvoir assumer cette position.

3-1 Détermination d'une analogie physique expliquant électricité et magnétisme.

- En 1861, dans l'article *« On physical lines of forces »*, première partie, Maxwell explique la manière dont il est parvenu à établir son analogie physique : *« ... J'ai éprouvé les plus grandes difficultés à me représenter l'existence de tourbillons contigus animés de mouvements de rotation identiques autour d'axes parallèles... la seule idée qui m'ai servi... c'est de m'être représenté ces tourbillons comme séparés de couches et particules animées chacune sur son axe d'un mouvement de rotation en sens contraire des mouvements tourbillonnaires... parce que en mécanique, quand on veut que deux roues tournent dans le même sens, on interpose entre elles un pignon... ».*

Ainsi Maxwell suppose que dans un même plan perpendiculaire aux lignes de forces, tous les tourbillons sont séparés par des couches de particules qui jouent le rôle de pignon... *« chaque tourbillon peut ainsi entraîner son voisin dans un mouvement de rotation de même sens que le sien ».*

Pour cela, il assimile l'électromagnétisme à la propagation d'une onde. Cette propagation dépend du milieu traversé. L'éther est indispensable.

- En 1862, dans la seconde partie de l'article, Maxwell décrit son analogie physique et en effectue une analyse mathématique. Il note : *« toute modification dans l'équilibre des forces électriques ou magnétiques déclenche un train d'ondes qui se répand à travers l'espace... » « Les phénomènes électromagnétiques sont dus à l'existence de matière répondant à certaines conditions de mouvement ou de pression à travers tout l'espace du champs magnétique, et non à une action directe à distance entre les aimants et les courants. La substance qui est le siège de ces effets peut être une certaine partie de la matière ordinaire, ou un éther étroitement associé à cette matière ». « L'effet des tourbillons est proportionnel... à leur vitesse tangentielle. Il est indépendant de leur diamètre... cette vitesse doit être énorme pour avoir des effets aussi importants dans un milieu (l'éther) aussi rare... le diamètre des tourbillons, indéterminé, est très certainement beaucoup plus petit que le diamètre des molécules de la matière... ».*

Ainsi, en considérant des roues contiguës, Maxwell peut les faire tendre vers des points et établir des équations de propagation continue d'un champ électromagnétique associé à des vibrations perpendiculaires. L'éther explique la lumière et l'électromagnétisme.

3-2 L'éther luminifère et l'éther électromagnétisme sont identiques.

- En 1864, dans son *« Traité d'électricité et de magnétisme »*, Maxwell franchit un nouveau pas. Il explique : *« En plusieurs [occasions], on a tenté d'expliquer les phénomènes électromagnétiques par une action mécanique transmise d'un corps à un autre par l'intermédiaire d'un milieu qui remplirait l'espace compris entre les corps. La théorie ondulatoire de la lumière suppose aussi l'existence d'un milieu. Nous avons maintenant à montrer que le milieu électromagnétique a des propriétés identiques à celles du milieu où se propage la lumière ». « Remplir l'espace d'un nouveau milieu toutes les fois que l'on doit expliquer un nouveau phénomène ne serait point un procédé bien philosophique ; au contraire, si, étant arrivés indépendamment par l'étude de deux branches différentes de la science à l'hypothèse d'un milieu, les propriétés qu'il faut attribuer à ce milieu pour rendre compte des phénomènes électromagnétiques se trouvent être de la même nature que celles que nous devons attribuer à l'éther lumineux pour expliquer les phénomènes de la lumière, nos raisons de croire à l'existence physique d'un pareil milieu se trouveront sérieusement confirmées ». « Mais les propriétés des corps sont susceptibles de mesures quantitatives. Nous obtenons ainsi la valeur numérique de certaines propriétés du milieu, par exemple de la vitesse avec laquelle se propage une perturbation, vitesse que nous pouvons calculer d'après les expériences électromagnétiques et que nous pouvons observer directement dans le cas de la lumière. Si l'on trouve que la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques est la même que la vitesse de la lumière, et cela, non seulement dans l'air, mais dans tous les autres milieux transparents, nous aurons de fortes raisons de croire que la lumière est un phénomène électromagnétique, et, par la combinaison des preuves de ce milieu, absolument comme, dans le cas des autres espèces de matière, nous nous convainquons par le témoignage combiné des sens ».*

La lumière est un phénomène électromagnétisme. Le comportement du champ électromagnétique peut être décrit uniquement par des équations mathématiques. L'analogie physique ayant joué son rôle, Maxwell n'y fait même plus référence. Il en est de même en 1873 : Maxwell utilise uniquement l'analyse pour expliquer les phénomènes électriques, magnétiques et lumineux, tandis que dans un article sur l'éther publié dans l' *« Encyclopedia Britanica »*, il considère celui-ci comme un simple support, sans effectuer de conjecture sur sa structure.

- En 1864, dans son *« Traité d'électricité et de magnétisme »*, Maxwell franchit un nouveau pas. Il explique : *« En plusieurs [occasions], on a tenté d'expliquer les phénomènes électromagnétiques par une action mécanique transmise d'un corps à un autre par l'intermédiaire d'un milieu qui remplirait l'espace compris entre les corps. La théorie ondulatoire de la lumière suppose aussi l'existence d'un milieu. Nous avons maintenant à montrer que le milieu électromagnétique a des propriétés identiques à celles du milieu où se propage la lumière ». « Remplir l'espace d'un nouveau milieu toutes les fois que l'on doit expliquer un*

nouveau phénomène ne serait point un procédé bien philosophique ; au contraire, si, étant arrivés indépendamment par l'étude de deux branches différentes de la science à l'hypothèse d'un milieu, les propriétés qu'il faut attribuer à ce milieu pour rendre compte des phénomènes électromagnétiques se trouvent être de la même nature que celles que nous devons attribuer à l'éther lumineux pour expliquer les phénomènes de la lumière, nos raisons de croire à l'existence physique d'un pareil milieu se trouveront sérieusement confirmées ». « Mais les propriétés des corps sont susceptibles de mesures quantitatives. Nous obtenons ainsi la valeur numérique de certaines propriétés du milieu, par exemple de la vitesse avec laquelle se propage une perturbation, vitesse que nous pouvons calculer d'après les expériences électromagnétiques et que nous pouvons observer directement dans le cas de la lumière. Si l'on trouve que la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques est la même que la vitesse de la lumière, et cela, non seulement dans l'air, mais dans tous les autres milieux transparents, nous aurons de fortes raisons de croire que la lumière est un phénomène électromagnétique, et, par la combinaison des preuves de ce milieu, absolument comme, dans le cas des autres espèces de matière, nous nous convainquons par le témoignage combiné des sens ».

La lumière est un phénomène électromagnétisme. Le comportement du champ électromagnétique peut être décrit uniquement par des équations mathématiques. L'analogie physique ayant joué son rôle, Maxwell n'y fait même plus référence. Il en est de même en 1873 : Maxwell utilise uniquement l'analyse pour expliquer les phénomènes électriques, magnétiques et lumineux, tandis que dans un article sur l'éther publié dans l' *« Encyclopedia Britanica »*, il considère celui-ci comme un simple support, sans effectuer de conjecture sur sa structure.

BIBLIOGRAPHIE

M.FARADAY	Experimental Researches in Electricity, 3 vols. , London, 1839-55.
C.F.GAUSS	« Théorèmes généraux sur les forces attractives et répulsives », Journal de mathématiques pures et appliquées, 7, 1842.
G.LAME	« Mémoire sur les surfaces isothermes », Journal de mathématiques pures et appliquées, vol.2, 1837.
J.C.MAXWELL	- « On Faraday's Lines of Force », Trans. Camb. Phil. Soc., 10, 27-83,1856. - « On Physical's Lines of Force », Phil., Mag., vol. 21, 1861-62. - The Scientific letters and papers of James Clerck Maxwell, edited by P.M. Harman, Cambridge University Press 1990, lettre n°45. - Traité d'électricité et de magnétisme, Gauthier-Villars, 2 vols., 1885-1889.

W.THOMSON - « On the uniform motion of heat in solid bodies, and its connexion with the mathematical theory of electricity », Cambridge mathematical Journal, 3, 1842.
- « On a mechanical representation of electric, magnetic ans galvanic forces », Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 2, 1847.
- « Diagrams of lines of force ; to illustrate magnetic permeability », 1872, Reprint Papers.

L.P. WILLIAMS Michael Faraday A biography, London, 1965, p.170-90.

Analogie et solutions graphiques

Dominique Tournès
IUFM de la Réunion, allée des Aigues Marines, Bellepierre, 97487 Saint-Denis cedex,
REHSEIS (UMR 7596),
CNRS et université Paris 7-Denis Diderot, Centre Javelot, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05
tournes@univ-reunion.fr.

Dans tout problème de calcul numérique, il y a des nombres qui sont donnés au départ, et des équations qui lient ces données à d'autres nombres inconnus : les résultats que l'on cherche. Ce schéma recouvre des situations très variées, depuis le simple calcul du produit de deux nombres jusqu'à des calculs astronomiques pouvant mobiliser plusieurs personnes pendant plusieurs années. Le calcul numérique direct, à la main et aux tables de logarithmes, est souvent long et pénible. Aussi, on a depuis longtemps imaginé des moyens détournés pour obtenir les résultats d'un calcul : l'idée générale est de représenter les nombres par des grandeurs géométriques (longueurs, aires, volumes, angles) ou physiques (mécaniques, électriques, hydrauliques, chimiques), et d'exploiter des phénomènes géométriques ou physiques dont la modélisation mathématique conduit aux mêmes équations que celles que l'on a à résoudre. Cela va se traduire souvent par la réalisation d'un appareil que l'on va placer dans une configuration initiale correspondant aux données, et que l'on va faire fonctionner de sorte à lire directement, à la fin, les grandeurs résultantes correspondant aux résultats numériques cherchés. Quand on calcule directement sur les nombres, on parle de calcul numérique « digital » ; si l'on passe par l'intermédiaire de grandeurs géométriques ou physiques, on parle de calcul « analogique ».

À la fin du 19^{e} et au début du 20^{e} siècle, il y a eu un foisonnement de recherches pour mettre au point des instruments de calcul analogique reposant sur des phénomènes physiques. Par exemple, pour résoudre les équations algébriques, on a imaginé divers systèmes de balances, mécaniques ou hydrostatiques. Dans la même veine, on peut citer quelques appareils curieux pour les équations différentielles, comme des intégrateurs hydrauliques ou chimiques. Si de tels appareils relèvent en partie de l'anecdote, plus importante pour l'histoire du calcul est l'analogie fondamentale entre systèmes mécaniques et circuits électriques. Chacun se souvient certainement de la masse suspendue à un ressort et du circuit RLC que l'on étudie en Terminale. Dans les deux cas, on obtient la même équation différentielle du second ordre à coefficients constants : l'analogie est parfaite. À partir de là, on conçoit qu'on puisse étudier le mouvement d'un système mécanique en le modélisant par un circuit électrique. Plus généralement, n'importe quelle équation différentielle du second ordre à coefficients constants, qu'elle soit d'origine abstraite ou issue d'un problème matériel, pourra elle aussi être résolue à l'aide d'un circuit électrique. Cette idée est à la base de calculateurs analogiques électroniques qui ont connu une époque florissante, surtout en Grande-Bretagne et aux États-Unis, entre 1930 et 1975. Dans ces calculateurs, les nombres sont représentés par des tensions. Une fois qu'on a mis au point des circuits élémentaires réalisant les opérations mathématiques usuelles (multiplication par une constante, intégration, dérivation, addition, etc.), il suffit ensuite de combiner ces circuits de base pour pouvoir effectuer n'importe quel calcul faisant intervenir des équations algébriques ou différentielles. Ces circuits peuvent même être inclus dans des appareils divers (radars, avions, appareils électroménagers ou audiovisuels, etc.), dans lesquels ils réalisent automatiquement, de manière interne, les calculs nécessaires. Cependant, depuis quelques années, les calculateurs analogiques ont disparu au profit de calculateurs digitaux. Tout, qu'il s'agisse d'images ou de son, est représenté par des suites de 0 et de 1. On parle de photo numérique, de son numérique, etc. On dit souvent qu'on est entré dans l'ère du « tout-numérique ».

La partie du calcul analogique qui repose sur des propriétés géométriques est ce que l'on appelle le « calcul graphique et graphomécanique ». C'est la partie du calcul analogique qui reste strictement interne aux mathématiques, en ce sens qu'elle est fondée sur l'interaction entre les deux grands types d'objets mathématiques que sont les nombres et les figures, autrement dit l'algèbre et la géométrie. Le calcul graphique est à situer dans une longue tradition de construction géométrique des problèmes qui remonte à l'Antiquité. Dans cette tradition, résoudre un problème, c'est donner une construction géométrique de sa solution à partir d'intersections de courbes que l'on trace sur le papier à l'aide de divers instruments. C'est pour cela que les mathématiques grecques et arabes se sont, dans une certaine mesure, organisées autour de la classification des courbes utilisées pour la construction des problèmes. La classification qui a prévalu quasiment jusqu'à l'époque de Descartes est celle qui a été formulée par Pappus au 4^{e} siècle. Pappus distingue trois types de problèmes : 1) les problèmes plans, que l'on peut construire en n'employant que des lignes droites et des cercles (autrement dit, les problèmes constructibles à la règle et au compas) ; 2) les problèmes solides, qui font intervenir en plus les sections coniques ; 3) les problèmes linéaires, qui nécessitent de recourir à d'autres courbes que les droites, cercles et coniques.

La construction des problèmes va être grandement renouvelée par Descartes, qui fait paraître en 1637 un petit livre sur la *Géométrie* en annexe de son fameux *Discours de la méthode*. Tout d'abord, Descartes précise les liens entre la géométrie et les nombres. Il établit une correspondance, une analogie, une sorte de dictionnaire, entre les opérations algébriques et les constructions géométriques. Ceci lui permet d'utiliser l'algèbre au service de la géométrie : les problèmes géométriques peuvent être ramenés à des équations algébriques, et ainsi l'algèbre apparaît comme un outil pour découvrir de nouvelles constructions géométriques qui étaient restées cachées aux Anciens. Mais le dictionnaire fonctionne aussi dans l'autre sens : en représentant les nombres par des segments de droite, on peut résoudre géométriquement des équations algébriques et, en particulier, calculer graphiquement leurs solutions. Poussant sa réflexion plus avant, Descartes propose une nouvelle classification des courbes qui va peu à peu supplanter celle de Pappus. Descartes distingue, d'une part, les courbes qui ont une équation algébrique et qu'il appelle « courbes géométriques », d'autre part, les autres courbes, regroupées dans une catégorie par défaut, celle des « courbes mécaniques ». Dans notre vocabulaire actuel, ces lignes sont respectivement appelées « algébriques » et « transcendantes ». Descartes pressent, sans pouvoir le justifier complètement, que les courbes géométriques sont aussi celles qui peuvent être tracées d'un mouvement continu unique. Il a imaginé lui-même des instruments permettant d'aller au-delà des problèmes plans, notamment un trisecteur d'angle et un mésolabe généralisé permettant d'insérer un nombre quelconque de moyennes proportionnelles entre deux longueurs (en particulier, ce dernier instrument permet l'extraction des racines n-ièmes).

Mais il n'y a pas que les courbes algébriques. C'est Leibniz qui, en 1693, a lancé l'idée qu'il fallait adjoindre un élément physique aux procédés classiques de construction pour pouvoir accéder aux courbes transcendantes, celles qui avaient été rejetées par Descartes. Cet élément physique, c'est le mouvement tractionnel, c'est-à-dire le mouvement de l'extrémité d'un fil posé sur un plan horizontal et dont on tire l'autre extrémité le long d'une courbe donnée. En 1693, Leibniz énonce à partir de là le principe d'une sorte d'intégraphe universel. Il s'agit d'un fil que l'on tire le long d'une courbe donnée et dont la longueur variable est déterminée par une autre courbe auxiliaire. En choisissant convenablement les deux courbes, on doit pouvoir résoudre n'importe quel problème inverse des tangentes. À la suite de Leibniz, on assiste ainsi à un nouvel élargissement de la géométrie. Désormais, toute courbe va pouvoir être tracée d'un mouvement continu grâce à un instrument adéquat, et donc va pouvoir servir au calcul graphique. En fait, c'est surtout au début du 20^{e} siècle, grâce aux progrès de la technologie, que de nombreux instruments mécaniques de précision vont être construits : des systèmes articulés pour tracer les courbes algébriques, des planimètres pour calculer l'aire enclose dans un contour fermé et des intégraphes pour construire la courbe intégrale d'une courbe donnée. Au total, l'ingénieur finit par disposer d'une collection complète de mécanismes élémentaires permettant d'effectuer tous les calculs mathématiques courants, qu'ils soient algébriques ou transcendants. Grâce à cela, on a vu fleurir, à partir des années 1920-1930, un calcul analogique graphomécanique de grande envergure. En particulier, de grands analyseurs différentiels ont été construits pour résoudre les équations différentielles apparaissant avec le développement de l'électricité et du téléphone. Pendant et juste après la Seconde Guerre mondiale, ces analyseurs différentiels graphomécaniques ont été en compétition avec des analyseurs différentiels électromécaniques, puis électroniques. On sait que les appareils électroniques l'ont l'emporté, avant d'être balayés à leur tour par le calcul digital.

Comme on le voit, le champ d'intervention du calcul graphomécanique est vaste, ses instruments sont variés, ses racines sont anciennes. À partir de la fin du 18e siècle, ce calcul va s'organiser en une discipline autonome, avec ses spécialistes, ses traités, ses enseignements, et cette discipline va être florissante jusque dans les années 1970. À côté du calcul par le trait général, trois sous-spécialités bien identifiées se sont même créées progressivement : la statique graphique, l'intégration graphique et la nomographie. En évoquant les planimètres et des intégraphes, nous avons déjà donné plus haut un aperçu rapide de l'intégration graphique, dont le but est de traiter graphiquement les opérations du calcul intégral. Il reste à dire quelques mots sur les deux autres spécialités, la statique graphique et la nomographie, ce qui nous permettra de découvrir de nouveaux aspects de l'analogie.

Commençons par la statique graphique. On peut voir les débuts de cette discipline dans le traité de statique de Simon Stevin, paru à Leyde, en flamand, en 1586. Stevin y développe systématiquement l'idée que la résultante de deux forces peut être obtenue graphiquement par la construction d'un triangle ou d'un parallélogramme. Un siècle plus tard, Pierre Varignon étend le procédé graphique de Stevin à un nombre quelconque de forces. Il dégage les notions de polygone des forces et de polygone funiculaire, qui permettent de calculer la résultante d'un système de forces. De façon générale, on assimile, par analogie, un solide soumis à un système de forces à une chaîne fictive (d'où le nom de polygone funiculaire) en certains points de laquelle on applique les forces données. Grâce à ces notions, on peut analyser graphiquement, sans calcul, des systèmes complexes. Ces idées avaient été esquissées par Poncelet, dans le cours de mécanique industrielle qu'il professait à l'École d'application du génie et de l'artillerie, à Metz, pendant les années 1820-1830, mais c'est surtout un ancien élève de cette école, Karl Culmann, qui est considéré comme le fondateur de la statique graphique. Culmann, dans un traité de 1866, fonde véritablement une discipline nouvelle capable d'étudier graphiquement les conditions de stabilité et de résistance des constructions. Les méthodes de Culmann obtiennent tout de suite un grand succès auprès des ingénieurs, car elles permettent d'éviter de nombreux calculs fastidieux. À la fin du 19e siècle, la statique graphique connaît même des applications surprenantes au-delà de son champ d'application d'origine. Par exemple, des recherches sur la chirurgie des os ou sur le calcul des primes d'assurance sont conduites par analogie avec des structures mécaniques. Mais l'application la plus spectaculaire de la statique graphique reste la construction de la Tour Eiffel, dont la structure a été entièrement calculée graphiquement.

Passons à la nomographie, ou science des tables graphiques (qu'on appelle aussi «abaques» ou « nomogrammes »). Les premières tables graphiques sont peut-être celles qui ont été conçues par les astronomes pour la fabrication des astrolabes, des cadrans solaires et des cadrans lunaires. La navigation offre une autre piste intéressante : dès le 16e siècle, on rencontre dans ce domaine des plans de carène de navire par coupes successives, que l'on peut lire comme de véritables abaques. Quant aux premières tables graphiques spécifiquement utilisées pour le calcul, elles sont à chercher du côté des règles et cercles à calcul, ces équivalents graphiques des tables de logarithmes inventés par les Anglais au 17e siècle. Largement répandues à partir du milieu du 19e siècle, les règles à calcul ont été l'instrument de prédilection des ingénieurs jusque dans les années 1970, avant d'être rapidement supplantées par les calculatrices électroniques de poche.

Pour préciser les origines de la nomographie, il faut se pencher également sur l'histoire des représentations graphiques, en particulier sur celles des relations entre trois variables. En 1795, Louis-Ézéchiel Pouchet, un manufacturier de Rouen, représente la multiplication comme sur une carte topographique, en imaginant que la relation $z = xy$ est l'équation d'une surface : il trace sur le plan xy les hyperboles d'égale cote correspondant à des valeurs particulières de z. Sur cette table, la multiplication et la division s'exécutent instantanément par simple lecture, et les interpolations entre les valeurs marquées se font elles-mêmes à vue, sans effort particulier. Un peu plus tard, vers 1840, un ingénieur des Ponts et Chaussées, Léon-Louis Lalanne, eut l'idée de l'anamorphose géométrique : en portant sur les axes des graduations non régulières, il réussit à ramener les courbes d'égale cote employées par Pouchet à des droites. Grâce à cette simplification, les anciens abaques à trois faisceaux de courbes concourantes sont remplacés par des abaques à trois faisceaux de droites concourantes. Pour expliquer son idée et justifier le vocabulaire qu'il emploie, Lalanne fait appel à une analogie avec un phénomène optique, l'anamorphose géométrique. L'avancée suivante de la nomographie se situe en 1884, lorsque Maurice d'Ocagne, un jeune ingénieur, imagine un nouveau type d'abaque. En exploitant les acquis de la géométrie projective, notamment le principe de dualité, il transforme les abaques à droites concourantes de Lalanne en abaques à points alignés. Ces derniers sont plus faciles à lire et, surtout, prennent moins de place sur la feuille de papier. Ocagne introduit à cette occasion un nouveau vocabulaire : il appelle « nomogrammes » ces nouveaux abaques et « nomographie » la science des abaques. À la fin du 19e siècle et au 20e siècle, il y a eu d'importantes recherches pour représenter également les relations à plus de trois variables. De nos jours, la nomographie continue à être utilisée dans certains secteurs d'activité. On rencontre notamment des abaques dans des manuels techniques, des catalogues de pièces mécaniques ou des catalogues de composants électroniques. Il semble aussi que les médecins et les pharmaciens utilisent encore de tels graphiques, notamment pour calculer rapidement le dosage d'un médicament.

En conclusion, on se rend compte que l'analogie a toujours été au cœur de la science du calcul. À l'intérieur des mathématiques, elle se trouve au centre de la dialectique entre algèbre et géométrie. Les notions de nombre, de courbe, de fonction, se sont forgées à travers cette dialectique. Certes, des obstacles proviennent régulièrement des imperfections et des limitations des instruments disponibles à un moment donné. Des obstacles proviennent aussi du fait qu'il n'y a jamais identité parfaite entre les objets numériques et les objets géométriques : alors qu'on n'arrive pas à représenter certaines grandeurs géométriques par des nombres, il y a, inversement, des nombres que l'on ne parvient pas à construire géométriquement à l'aide de certains procédés et de certains instruments. Mais ces blocages provisoires sont sources de fécondité : ils entraînent un élargissement permanent du champ des nombres utilisés, l'introduction régulière de nouvelles courbes et l'invention de nouveaux instruments pour les tracer. On peut d'ailleurs penser que c'est souvent dans le calcul, à travers les problèmes pratiques que se posent les astronomes, les physiciens, les ingénieurs civils et militaires, que se préparent, sur le tas, informellement, les objets mathématiques dont les théoriciens s'empareront plus tard. Enfin, bien entendu, l'analogie n'est pas seulement interne aux mathématiques. Comme nous l'avons vu, l'intervention de phénomènes mécaniques et électriques a été, elle aussi, extrêmement féconde.

Bibliographie :

ASPRAY (William), éd., *Computing before computers*, Ames : Iowa State University Press, 1990.

EVESHAM (Harold Ainsley), Origins and development of nomography, *Annals of the History of Computing*, 8 (1986), p. 324-333.

JACOB (Louis-Frédéric), *Le calcul mécanique*, Paris : Doin, 1911.

KARPLUS (Walter J.) & SOROKA (Walter W.), *Analog methods : computation and simulation*, New York : McGraw Hill, 2e éd., 1959.

MARGUIN (Jean), *Histoire des instruments et machines à calculer*, Paris : Hermann, 1994.

MAURER (Bertram), *Karl Culmann und die graphische Statik*, Berlin : Verlag für Geschichte der Naturwissenschaft und Technik, 1998.

OCAGNE (Maurice d'), *Calcul graphique et nomographie*, Paris : Doin, 1908 ; 2e éd., 1914 ; 3e éd., 1924.

RUNGE (Carl), *Graphical methods*, New York : Columbia University Press, 1912. Éd. allemande, Graphische Methoden. Leipzig & Berlin : Teubner, 1915 ; 2e éd. 1919.

SMALL (James S.), *The analogue alternative. The electronic analogue computer in Britain and the USA, 1930-1975*, London & New York : Routledge, 2001.

TOURNÈS (Dominique), Pour une histoire du calcul graphique, *Revue d'histoire des mathématiques*, 6 (2000), p. 127-161.

TOURNÈS (Dominique), L'intégration graphique des équations différentielles ordinaires, *Historia mathematica*, 30 (2003), p. 457-493.

WILLERS (Friedrich Adolf), *Mathematische Maschinen und Instrumente*, Berlin : Akademie-Verlag, 1951.

Ressemblance entre objets

Jean-Paul Delahaye
Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille UPRESA CNRS 8022
Université des Sciences et Technologies de Lille F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
delahaye@lifl.fr

Ce compte-rendu est un article de RSTI - RIA - 17/2003. Regards croisés sur l'analogie, pages 885 à 898.

RÉSUMÉ. Cet article présente, sans entrer dans les détails formels, diverses idées mathématiques utilisées pour saisir la notion de ressemblance entre objets dans un espace géométrique (par exemple, le plan ou l'espace de dimension 3). De toutes les notions envisagées, la distance informationnelle (provenant de la théorie algorithmique de l'information) semble la plus générale. Elle est aussi susceptible d'applications intéressantes.
ABSTRACT. This paper presents (without formal detail) various mathematical ideas that have been used for the notion of " similar objects " in a geometric space. The most important one is the information distance. The is a notion elaborated from the concepts of the algorithmic information theory (or Kolmogorov complexity theory). It seems to be a very general and practical tool.
MOTS-CLÉS : analogie, complexité, distance, théorie algorithmique de l'information.
KEY WORDS : analogy, complexity, distance, algorithmic information theory.

1. Intelligence et ressemblance

La notion de ressemblance est essentielle à notre survie : sans une perception rapide des «situations équivalentes», sans une maîtrise efficace des «visages semblables», des «animaux de la même espèce», etc., nous ne pourrions pas nous orienter, nous reconnaître entre nous, identifier les aliments comestibles, les animaux dangereux... Pourtant jamais deux situations ne sont égales en tout point, jamais deux fruits ou légumes ne sont exactement les mêmes, jamais à deux instants différents, le visage de nos connaissances ne présente précisément un aspect identique, etc. Malgré cela, nous savons juger que deux situations, deux objets, deux images sont analogues et cette capacité est une composante essentielle de toute intelligence. L'un des problèmes de l'intelligence artificielle consiste justement à faire des programmes qui, au moins partiellement, reconnaissent des objets approchants.

Les mathématiques qui prétendent fournir des outils pour comprendre le monde, le modéliser et le maîtriser proposent-elles de bonnes théories de la ressemblance ? Nous allons voir que oui. Elles en proposent plusieurs et celles que nous allons évoquer sont toutes basées sur des idées profondes. La dernière que nous rencontrerons (C. Bennett & al., 1993) a été récemment créée par un groupe de physiciens, de mathématiciens et d'informaticiens : elle est fascinante par les liens qu'elle établit avec la thermodynamique et parce que certains résultats montrent qu'elle est peut-être la théorie ultime de la ressemblance.

2. La géométrie et la topologie

Une idée mathématique ancienne pouvant servir ici est celle de «semblable géométrique» : deux objets sont semblables si en leur faisant effectuer des translations, des rotations, des symétries et des homothéties (agrandissements et rapetissements bien proportionnés) on peut les superposer (figure 1).

Cette notion de figures géométriques semblables est certes très utile pour faire des plans de voitures ou de maisons, mais elle est trop limitée car rigide. Ce n'est pas elle, par exemple, qui pourra nous indiquer si deux photographies différentes représentent un même visage. Les mathématiciens conscients de cette limite ont proposé une notion bien plus souple de ressemblance : l'homéomorphie.

Deux surfaces sont homéomorphes si, en imaginant qu'elles sont fabriquées avec un caoutchouc parfait, on peut déformer l'une en l'autre sans faire de déchirure. Cette fois la notion de ressemblance obtenue est trop molle ! La surface d'un cube est topologiquement semblable à celle d'un ballon ou même d'une fourchette. La ressemblance topologique engendre des situations paradoxales : un système d'anneaux enlacés est transformable progressivement en un système d'anneaux non enlacés (figure 2). Bien d'autres notions tirées de la topologie généralisent et étendent celle d'homéomorphisme, mais chacune ne saisit qu'une part bien mince de l'idée d'analogie. Une raison en est sans doute que pour bien parler de figures semblables, il faut renoncer à donner une réponse oui ou non : deux choses sont plus ou moins proches l'une de l'autre. Finalement il faut une « mesure de ressemblance ». Cette évaluation numérique peut être donnée par ce qu'on appelle des distances : deux objets identiques seront à distance nulle ; deux objets très semblables seront à petite distance l'un de l'autre ; la distance entre deux objets très différents sera grande.

FIG. 1 – *La notion de* similitude *géométrique permet de rendre compte de ce type de ressemblance. Cependant deux figures peuvent se ressembler sans être semblables au sens de la géométrie.*

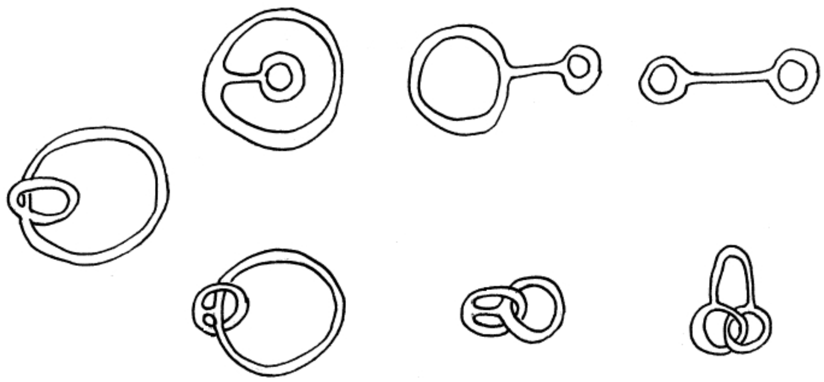


FIG. 2 – *Si une surface peut être déformée progressivement pour en donner une autre, elles sont ressemblantes. Cependant cette ressemblance topologique est bien trop tolérante et conduit à certains paradoxes comme celui (représenté ici) des deux anneaux enlacés qu'on sépare sans qu'ils se traversent.*

3. Distance de Hausdorff

Une première distance satisfaisante dans un assez grand nombre de cas est la distance de Hausdorff nommée ainsi pour honorer Félix Hausdorff, mathématicien allemand mort en 1942, qui a formulé en 1914 les axiomes généraux de la topologie (voir C. Berge, 1966). La distance de Hausdorff mesure la distance entre deux sous-ensembles A et B d'un espace métrique (des généralisations tenant compte des couleurs sont possibles). Par définition, deux objets A et B sont à une distance de Hausdorff l'un de l'autre de moins de r unités, si chaque point de A est à moins de r unités d'au moins un point de B, et si réciproquement, chaque point de B est distant de moins de r unités d'au moins un point de A. Le plus petit r (ou la borne inférieure lorsqu'il n'y a pas de plus petit r) donne la distance de Hausdorff entre A et B. Un procédé simple permet de visualiser ce qu'est la distance de Hausdorff entre deux ensembles A et B : on imagine qu'on remplace chaque point de A par une tache ronde (une sphère) dont on fait grossir le rayon r jusqu'à ce que B soit recouvert par ce « A gonflé ». On imagine aussi le processus réciproque (le recouvrement de A par un « B gonflé »). La distance de Hausdorff entre A et B est le plus petit r (ou la borne inférieure des r) permettant simultanément les deux recouvrements (figure 3).

Cette distance saisit correctement de nombreux aspects de l'idée intuitive de ressemblance. Deux dessins différant l'un de l'autre par l'épaisseur des traits, ou par le fait que l'un est dessiné en pointillé seront considérés très proches l'un de l'autre : dès que l'on fait un peu gonfler l'un, il recouvre l'autre, et inversement. De même, la version brouillée d'un dessin A à travers un miroir dépoli sera peu distante du dessin A. De même encore, si dans un dessin, vous remplacez les zones noires par des zones finement hachurées ou par des zones emplies de points aléatoires, alors la distance de la figure initiale à sa transformée sera petite.

Un disque et une ellipse peu aplatie, de rayons comparables, seront proches pour la distance de Hausdorff. Un carré et un cercle, en revanche, seront plus éloignés. D'une manière générale, changer la texture ou déplacer légèrement les points d'un dessin en en préservant l'allure générale produit un dessin proche pour la distance de Hausdorff, alors que changer

FIG. 3 – *Ces deux dessins sont proches au sens de la distance de Hausdorff, car en remplaçant chaque point de celui de gauche par un disque de rayon r (r assez petit) on recouvre celui de droite, et réciproquement.*

les formes engendre des dessins éloignés. Un cas intéressant est celui de l'approximation finie d'ensembles infinis. Un dessin comportant un nombre infini de points - exemple : un disque plein - peut être approché de plus en plus finement (au sens de la distance de Hausdorff) par une série de figures ayant chacune un nombre fini de points. Ici l'infini, même non dénombrable, se laisse approcher facilement par du fini.

FIG. 4 – *A cause de points isolés présents dans le dessin de gauche et absents du dessin de droite ces deux dessins ne sont pas proches au sens de la distance de Hausdorff.*

Cette distance est implicitement utilisée par tous ceux qui représentent des fractales : jamais personne ne dessine vraiment une fractale, car une fractale, par définition, est infiniment découpée ce qu'aucun écran, aucun crayon, aucune imprimante ne réussit jamais à reproduire (notons aussi que personne ne dessine de vrais cercles ou de vraies lignes). En revanche, les représentations qu'on donne des fractales sont bien des objets proches au sens de la distance de Hausdorff. Nombreux donc sont ceux qui utilisent la notion de ressemblance que saisit la distance de Hausdorff sans jamais en avoir entendu parler ! Puisque deux dessins proches au sens intuitif sont fréquemment mesurés proches au sens de la distance de Hausdorff, on comprend pourquoi cette distance est un outil essentiel de la morphologie mathématique (discipline dont le but est la compréhension et l'analyse des images et des formes et dont les applications concernent la vision artificielle, le traitement informatisé des images, la biologie et la géologie, voir J. Serra, 1982).

4. Insuffisances de la distance de Hausdorff

Pourtant les cas suivants montrent les limites de la distance de Hausdorff qui échoue clairement à reconnaître certaines proximités entre des formes que l'esprit humain identifie sans hésitation.

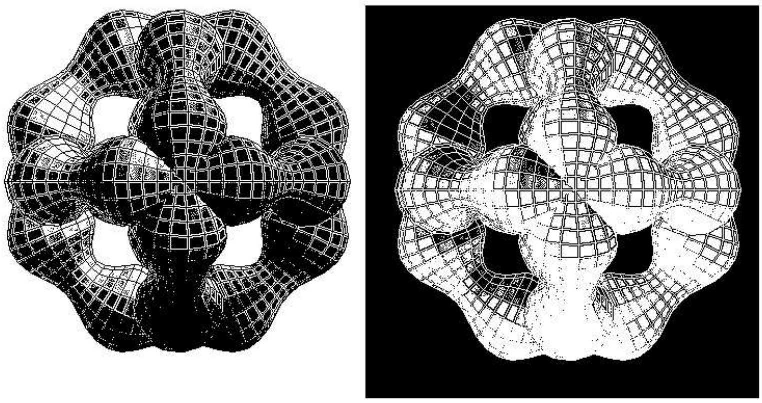


FIG. 5 – *Au sens de la distance de Hausdorff ces deux dessins sont éloignés l'un de l'autre. On passe de l'un à l'autre par un programme simple (« changer les points noirs en points blancs, et réciproquement »), ces deux dessins sont donc proches au sens de la distance informationnelle.*

La distance de Hausdorff entre un dessin et sa version en négatif (ou sa version dans laquelle seul le contour des formes est gardé) est grande alors que, bien sûr, nous voyons très rapidement que le même objet est représenté (figure 5). Pire, ajouter un unique point situé à l'extérieur d'un dessin donne un dessin très éloigné pour la distance de Hausdorff, alors que pour notre vision les deux objets apparaissent presque identiques (figures 4 et 6). La distance entre un objet et le même objet rapetissé d'un facteur constant est grande alors que nous percevons tout de suite leur structure commune. De même encore, la distance de Hausdorff échoue à reconnaître la similitude entre des images d'un objet tridimensionnel (un visage par exemple) vu sous divers angles ou des éclairages différents alors que notre cerveau perçoit rapidement l'analogie des formes.

Un défaut mineur aussi de la distance de Hausdorff est qu'elle ne donne rien de bon avec des objets infinis en taille. Deux droites passant par un même point, ou bien sont confondues, et alors distantes de 0 (ce qui est satisfaisant), ou bien sont distantes de +8, même si leur angle est très faible (ce qui n'est pas vraiment satisfaisant). Les déformations " caoutchouteuses " ne sont pas bien mesurées non plus : les montres molles de Dali ne sont pas proches des vraies montres pour la distance de Hausdorff alors que pour nous elles le sont.

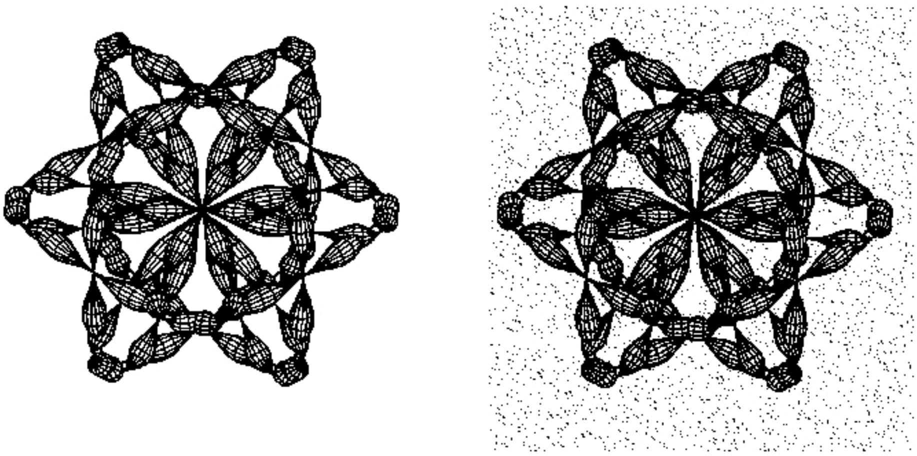


FIG. 6 – *A cause des points aléatoires du dessin de droite, ces deux dessins sont éloignés au sens de la distance de Hausdorff. Pourtant nous percevons qu'ils se ressemblent. La distance informationnelle trouvera que ces deux dessins sont proches à la condition que les points aléatoires du dessin de droite puissent être définis simplement, autrement dit, à la condition que leurs positions soient fixées par une fonction pseudo-aléatoire.*

Une combinaison de la notion de distance de Hausdorff avec la notion de similitude géométrique arrange certains de ces défauts : pour mesurer la distance entre A et B avec cette distance (qu'on peut appeler Hausdorff-bis) on envisage toutes les figures obtenues par application d'une similitude géométrique à B et on regarde celle qui au sens de la distance de Hausdorff est la plus proche de A ; c'est elle qui détermine alors la distance entre A et B pour Hausdorff-bis. Cette variante corrige les défauts concernant les déformations d'échelle et déplacements, mais ne change rien aux insuffisances de la distance de Hausdorff concernant le passage au négatif, l'ajout de points à l'extérieur, les photos d'un même visage ou les déformations caoutchouteuses.

5. Une distance provenant de la théorie algorithmique de l'information

La dernière notion de ressemblance que nous mentionnerons correspond à un progrès important sur le plan théorique, et en même temps ouvre la porte à certaines applications pratiques. Cette notion que nous appellerons distance informationnelle est le résultat du travail commun de cinq chercheurs provenant de disciplines différentes : les physiciens Wojciech Zurek du Santa Fe Institute, Charles Bennett du centre de recherche IBM à New York ; le mathématicien Peter Gacs de l'Université de Boston aux États-Unis, les informaticiens Ming Li de l'Université de Waterloo au Canada et Paul Vitanyi de l'Université d'Amsterdam (voir (M. Li, 1993) ; (M. Li, 2001), (M. Li, 2003)).

La distance informationnelle présuppose que tous les objets que l'on considère sont des ensembles finis de points pris dans un ensemble discret. Il faut par exemple imaginer qu'il s'agit des pixels (noirs ou blancs) d'une image. Dans le cas d'un espace métrique quelconque, pour appliquer la notion, on doit au préalable définir les regroupements insécables de points qui joueront le rôle de pixel. Avec la distance de Hausdorff, l'hypothèse de finitude n'était pas nécessaire : pour affiner un concept, on est parfois obligé de renoncer à l'infini. Des généralisations de la distance informationnelle à plus de deux dimensions et prenant en compte les couleurs sont possibles. L'idée fondamentale est que si deux objets sont semblables, on passe facilement de la description de l'un à la description de l'autre, et réciproquement. En revanche, plus le passage de l'une à l'autre est long à détailler plus les objets doivent être considérés comme différents, c'est-à-dire éloignés.

La difficulté (du passage d'une description de l'objet A à la description de l'objet B) est mesurée par la longueur du plus court programme qui transforme la donnée des points de A (supposés connus par énumération) à la donnée des points de B. La distance informationnelle est précisément définie comme la somme des longueurs du plus court programme permettant de transformer A en B, et du plus court programme permettant de transformer B en A. On montre que cette distance varie peu quand on change le langage de programmation utilisé comme référence pour parler de la taille des programmes.

L'idée d'utiliser une notion de plus court programme provient de la théorie algorithmique de l'information (appelée aussi théorie de la complexité de Kolmogorov, voir M. Li, 1993, Delahaye 1994) où l'on mesure la complexité d'un objet A par la taille du plus court programme qui produit A. La théorie de la distance informationnelle utilise d'ailleurs de nombreux résultats de la théorie algorithmique de l'information.

Pour illustrer la notion de distance informationnelle, considérons un dessin et le même dessin en négatif (nous avons dit que la distance entre ces deux objets pour la distance de Hausdorff est grande). Ces deux objets sont-ils proches pour la distance informationnelle ? Oui, car on écrit facilement un programme de « passage au négatif » et ce programme est court : le plus court programme transformant le premier dessin en le second (qui est le même ici que celui transformant le second en le premier) sera encore plus court (notons qu'il n'est pas indispensable de connaître précisément le plus court programme) et donc les deux dessins seront proches au sens de la distance informationnelle.

Ajouter un point à l'objet A donne un objet B que notre cerveau considère proche. En accord avec cette perception (et contrairement encore à la distance de Hausdorff qui se trompait dans un tel cas) la distance informationnelle trouve que A et B sont très proches car le programme le plus court ajoutant un point, et le programme le plus court enlevant un point (pour passer de B à A) sont tous les deux petits.

Plus remarquable et plus intéressant est l'exemple suivant : si l'on considère l'image d'un objet tridimensionnel prise selon un certain point de vue et une autre image du même objet prise selon un autre angle de vue, là encore on pourra, le plus souvent par l'utilisation d'un programme relativement court, passer d'une image à l'autre (figures 7 et 8). La parenté de deux images provenant d'un même objet pris sous différentes vues, ou même sous différents éclairages est correctement détectée par la distance informationnelle. Si on considère deux textes assez longs, le second étant le résultat d'une remise en page du premier (changement des polices de caractères, des sauts de lignes, etc.) ils seront proches l'un de l'autre pour la distance informationnelle, car le passage de l'un à l'autre se décrit - et donc se programme -, de manière concise (figure 9). De nombreux autres exemples prouvent que cette distance basée sur la taille des programmes satisfait l'essentiel de nos attentes, et que la grande majorité des défauts de la distance de Hausdorff ne se retrouve pas avec la distance informationnelle.

Quelques problèmes subsistent cependant liés aux suites aléatoires. Par exemple, un nuage aléatoire et uniforme de points sur une feuille sera considéré comme très éloigné d'un nuage d'apparence identique (même densité, même forme) engendré par une fonction pseudo-aléatoire. L'utilisation pratique de la distance informationnelle semble aussi rencontrer de graves problèmes.

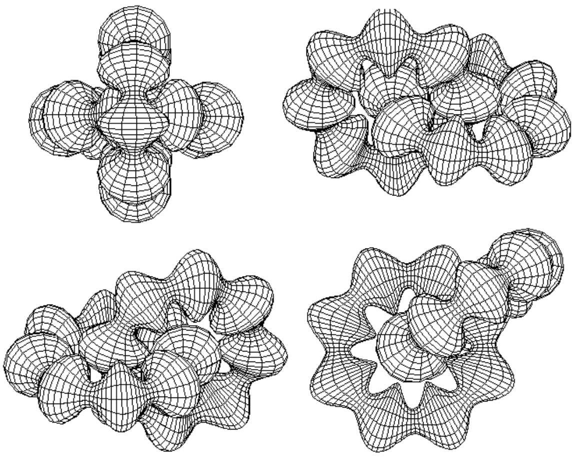


FIG. 7 – *Tous ces dessins sont proches deux à deux parce que ce sont des vues d'un même objet de l'espace. La distance informationnelle entre ces objets est relativement petite (ce qui est donc satisfaisant)alors que la distance de Hausdorff est grande.*

```
restart ; with(plots) : np:=121 : tp := 16 : R:=3 : RT:= 1/2 : tubeplot({
 [R*sin(t),R*cos(t),0,t=0..2*Pi,
 radius=RT*(2+sin(8*t)),numpoints=np,tubepoints=tp],
 [0,R+R*sin(t),R*cos(t),t=0..2*Pi,
 radius=RT*(2+sin(8*t)),numpoints=np,tubepoints=tp]
 },style=patch, scaling=CONSTRAINED);
```

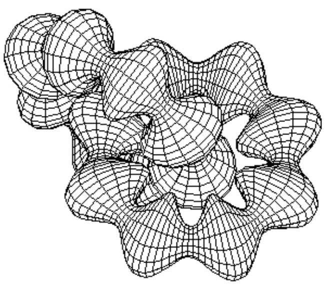
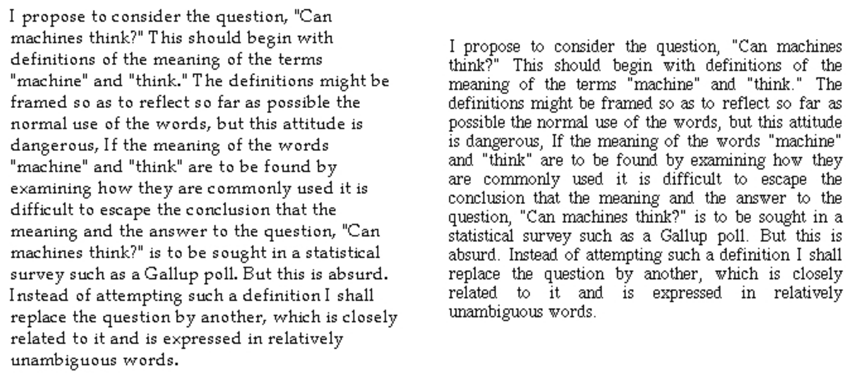


FIG. 8 – *La complexité de Kolmogorov de l'objet représenté sur la figure précédente est petite car un programme court (ici en Maple) l'engendre.*


I propose to consider the question, "Can machines think?" This should begin with definitions of the meaning of the terms "machine" and "think." The definitions might be framed so as to reflect so far as possible the normal use of the words, but this attitude is dangerous, If the meaning of the words "machine" and "think" are to be found by examining how they are commonly used it is difficult to escape the conclusion that the meaning and the answer to the question, "Can machines think?" is to be sought in a statistical survey such as a Gallup poll. But this is absurd. Instead of attempting such a definition I shall replace the question by another, which is closely related to it and is expressed in relatively unambiguous words.

I propose to consider the question, "Can machines think?" This should begin with definitions of the meaning of the terms "machine" and "think." The definitions might be framed so as to reflect so far as possible the normal use of the words, but this attitude is dangerous, If the meaning of the words "machine" and "think" are to be found by examining how they are commonly used it is difficult to escape the conclusion that the meaning and the answer to the question, "Can machines think?" is to be sought in a statistical survey such as a Gallup poll. But this is absurd. Instead of attempting such a definition I shall replace the question by another, which is closely related to it and is expressed in relatively unambiguous words.

FIG. 9 – *Deux textes (assez longs) imprimés selon deux mises en page différentes sont éloignés l'un de l'autre au sens de la distance de Hausdorff, mais proches au sens de la distance informationnelle.*

6. Calcul de la distance informationnelle ?

Peut-on mesurer facilement la distance informationnelle entre objets ? Malheureusement non. On majore sans mal la distance informationnelle entre objets : à chaque fois qu'on trouve des programmes qui transforment A en B et B en A, on en déduit une telle majoration. En revanche, il est exceptionnel de trouver des programmes dont on puisse prouver qu'ils sont les plus courts possibles, et donc, mesurer exactement la distance informationnelle est très rare.

Cette difficulté pratique est liée à l'indécidabilité logique dont le problème de l'arrêt des programmes proposé en 1936 par Alan Turing a été le premier exemple. Le résultat de Turing nous dit que jamais on ne pourra faire un programme qui puisse, pour chaque programme qu'on lui présente, calculer si oui ou non il s'arrête au bout d'un temps fini. Le résultat d'indécidabilité concernant la distance informationnelle nous dit que jamais nous ne pourrons concevoir un programme pour calculer, chaque fois que nécessaire, la distance informationnelle entre deux objets. Certains programmes pourront peut-être traiter quelques cas, mais aucun ne pourra les traiter tous, et donc, aucun mécanisme général de raisonnement ou de calcul ne pourra servir d'instrument de mesure général pour la distance informationnelle.

Cette impraticabilité reflète sans doute l'analyse intelligente nécessaire à la formulation des jugements de ressemblance : certains nous sont immédiats, d'autres ne sont perçus qu'après des longues analyses, d'autres encore ne le sont que par certains rares esprits. Il n'est donc pas étonnant que la mesure du véritable degré d'analogie entre des objets quelconques soit difficilement mécanisable et ne puisse pas, en définitive, l'être complètement.

L'intelligence est la cristallisation dans nos gênes et ensuite dans notre cerveau des très longs calculs réalisés par l'évolution et par le développement des cultures humaines. L'évolution biologique et le développement culturel sont en effet de très longues séquences d'événements assimilables à des opérations élémentaires de calculs dont les produits sont le langage, les sciences et plus généralement nos facultés d'analyse. Ces très longs calculs, sans que nous sachions précisément comment, ont produit dans nos cerveaux une notion d'analogie très fine et très efficace, essentielle à notre survie. Cette cristallisation est incomplète (il n'y a pas de raisons sérieuses de croire que notre intelligence échappe aux limitations formulées par la logique) mais elle est bien meilleure que celle que nous réussissons à placer dans nos programmes : aujourd'hui nous ne savons pas écrire des programmes assez malins pour égaler notre capacité à percevoir des analogies (figure 10).

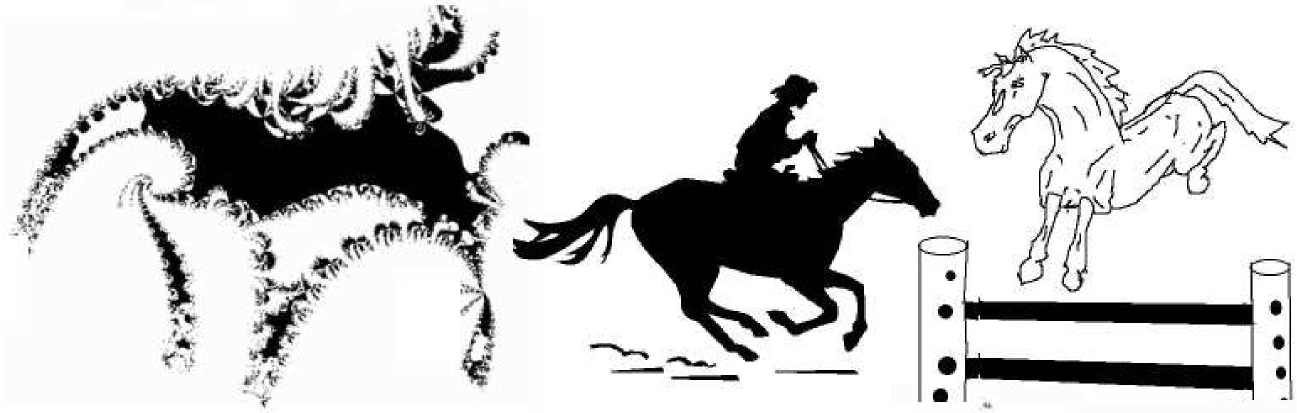


FIG. 10 – *Bien sûr la ressemblance entre ces images échappe aussi bien à la distance de Hausdorff qu'à la distance informationnelle.*

7. Utilité pratique de la distance informationnelle

L'indécidabilité rend-t-elle stérile la distance informationnelle ? Heureusement non, car les majorations que l'on peut calculer facilement la rendent utilisable dans plusieurs cas.

Un domaine d'application de la distance informationnelle est la bioinformatique (M. Li et al., 2001) ; (M. Li et al., 2003) ; (J.-S. Varré et al., 1999) où elle sert à évaluer la distance entre séquences génétiques. Depuis longtemps les généticiens, et tout particulièrement ceux qui souhaitent faire de la reconstitution d'arbres phylogénétiques (ce sont les arbres qui indiquent les parentés entre espèces animales et végétales) utilisent des mesures de ressemblance entre séquences génétiques. L'idée à la base des distances les plus souvent utilisées est le décompte des mutations, délétions ou insertions de nucléotides (les lettres de l'alphabet génétique) : plus le nombre de ces événements ponctuels pour passer d'une séquence à l'autre est grand plus les séquences sont considérées comme éloignées. Récemment, de nouvelles distances ont été proposées qui mesurent l'éloignement entre séquences en considérant d'autres événements possibles, comme les déplacements de morceaux de séquences ou leur duplication. Ces distances sont conçues comme des approximations calculables de la distance informationnelle. Elles sont plus précises que les distances utilisées classiquement (qu'elles généralisent) et produisent des arbres phylogénétiques intéressants. Une autre application est le classement automatique des langues : un arbre des langues a été obtenu par cette méthode (voir (M. Li et al., 2003)).

8. Calculs réversibles et thermodynamique

Une raison d'espérer dans ce type d'applications est l'interprétation thermodynamique de la distance informationnelle. Les cinq chercheurs physiciens, mathématiciens et informaticiens dont nous parlons ont en effet démontré un résultat remarquable concernant la distance informationnelle : elle est liée au coût thermodynamique minimum de la transformation de A en B et de B en A.

On sait depuis quelques années, à la suite des travaux de Rolf Landauer et Charles Bennett, qu'il est possible, en théorie, de réaliser des calculs sans dépense d'énergie et n'entraînant donc aucun accroissement de l'entropie physique. Lors d'un calcul les seules dépenses d'énergie inévitables proviennent de l'utilisation d'opérations irréversibles comme l'effacement d'une mémoire dont on peut se passer si on accepte de garder des informations inutiles en fin de calcul.

Il est alors intéressant de considérer le flux minimum d'informations (ajout d'informations à A au départ, effacement d'informations à la fin du calcul une fois B obtenu) pour transformer A en B de manière réversible. La distance ainsi définie, motivée par des considérations thermodynamiques, se trouve être équivalente à la distance informationnelle (elle en diffère d'un facteur deux au plus).

D'autres propriétés de minimalité confèrent un statut privilégié à la distance informationnelle parmi toutes les distances envisageables (C. Bennett, 1993 ; M. Li et al., 1993).

La distance informationnelle entre A et B est donc une quantité ayant un sens en thermodynamique, ce qu'aucune autre distance ou notion mathématique de similitude ne possédait jusqu'à présent. Quelles que soient les difficultés qu'on rencontre dans la mise en œuvre des idées de la théorie algorithmique de l'information, l'adéquation entre ce que donnent les versions pratiques de la distance informationnelle et l'intuition, les liens avec le monde physique ainsi que les résultats d'universalité qu'on obtient, montrent clairement que nous avons affaire à un nouvel outil puissant, général et bien fondé dont on peut être certain qu'il jouera un rôle important dans les développements futurs de l'I.A.

9. Bibliographie

C. Bennett, P. Gacs, M. Li, P. Vitanyi, W. Zurek, "Thermodynamics of Computation and Information Distance", Proc. 25th ACM Symp. Theory of Computation, 1993, p. 21-30.

C. Berge, Espaces topologiques et fonctions multivoques, Dunod, Paris, 1966, (chapitre 6 sur la distance de Hausdorff).

J.-P. Delahaye, Information, complexité et hasard, Hermès, Paris, 1994 (seconde édition 1998).

M. Li, P. M. B. Vitanyi, An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications, Springer-Verlag, 1993, (voir le chapitre 8 sur la distance informationnelle).

M. Li, J. H. Badger, X. Chen, S. Kwong, P. Kearney and H. Zhang, "An Information Based Sequence Distance and Its Aplication to Whole Mitochondrial Genome Phylogeny", Bioinformatics, Vol 17, n˚31, 2001, p. 147-154.

M. Li, X. Chen, X. Li, B. Ma, P. Vianyi, "The Similarity Metric", Proc. 14th ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (SODA), 2003. http ://www.cwi.nl/ paulv/kolmcompl.html.

J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morpology, Academic Press, New York, 1982.

J.-S. Varré, J.-P. Delahaye, E. Rivals, "Transformation Distances : a Family of Dissimilarity Measures Based on Movements of Segments", Bioinformatics, Vol 15, n˚ 3, 1999, p. 194-202.

Analogie entre le calcul différentiel et le calcul algébrique 1ère partie

Jean-Pierre Lubet
Anne-Marie Marmier
Université Lille 1

En 1684, Leibniz rend publiques les principales règles de son calcul, avec la notation dy pour la différentielle. Quant aux différentielles successives, elles sont d'abord notées par la répétition de la lettre d : ddy, $dddy\dots$ C'est seulement en 1695 qu'il introduit la notation exponentielle $d^m y$. Simultanément, il utilise les exposants négatifs pour marquer des intégrations $d^{-1} = \int^1$, $d^{-2} = \int^2$. Puis, en mai 1695, il fait le lien entre ces nouvelles notations et l'analogie entre le développement du binôme et le développement de la différentielle d'un produit, par exemple :

$$(1)\ \boxed{3}\,\overline{x+y} = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \qquad (2)\ d^3, xy = 1yd^3x + 3dyd^2x + 3dxd^3y + 1xd^3y$$

Cette découverte l'émerveille, mais elle provoque aussi en lui une certaine perplexité (*il y a bien des mystères cachés là-dessous* [MS I, p. 30]). Il revient sur cette question dans un mémoire de 1710 [Parmentier, p. 409-421]. Il note alors les puissances sous la forme $p^n x$ (pour x^n), soulignant encore mieux l'analogie avec les différentielles ; et il utilise des considérations de combinatoire pour justifier avec soin l'apparition de coefficients numériques identiques dans les relations telles que (1) et (2).

Le thème réapparaît, en 1774, avec un mémoire de Lagrange. Manipulant les fonctions à partir de leur développement en série entière, Lagrange démontre la formule de Taylor. Il note que les coefficients utilisés sont les mêmes que ceux qui apparaissent dans le développement de la fonction exponentielle, il décide d'écrire la formule sous la forme :

$$u(x+\xi, y+\psi, z+\zeta\dots) - u(x,y,z\dots) = \Delta u = e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}+\psi\frac{du}{dz}\zeta+\cdots} - 1,$$

avec la consigne suivante : *après avoir développé* [la formule] *suivant les puissances de du, on applique les exposants de ces puissances à la caractéristique d pour indiquer des différences du même ordre que les puissances, c'est-à-dire qu'on change du$^\lambda$ en d$^\lambda$u...*[*Œuvres* III, p. 450]. Il faudra suivre la même règle pour interpréter les formules générales que Lagrange écrit :

$$\Delta^\lambda u = (e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}+\psi\frac{du}{dz}\zeta+\cdots} - 1)^\lambda, \quad \sum{}^\lambda u = \frac{1}{(e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}+\psi\frac{du}{dz}\zeta+\cdots} - 1)^\lambda}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{\log(1+\Delta_\xi u)}{\xi},$$

La méthode ordonne, unifie et généralise un ensemble d'identités qui se présentaient jusque là de façon dispersée. Cependant, le statut du procédé reste marqué par des ambiguïtés, pour Lagrange lui-même *l'opération [...] n'est pas fondée sur des principes clairs et rigoureux,*

[...] il serait très difficile d'en donner une démonstration directe et analytique ; cela tient, en général, à l'analogie qu'il y a entre les puissances positives et les différences, aussi bien qu'entre les puissances négatives et les intégration... [p. 451-452].

Plusieurs mathématiciens (notamment, Laplace) vont tenter de fournir une justification plus complète, à une démarche qui semble relever d'abord d'une induction. Parmi eux, Arbogast se débarrasse de la condition du changement des $(\partial.u)^r$ en $\partial^r.u$ (∂ est le symbole de la dérivation) et il introduit une nouvelle formulation du théorème de Taylor :

$$(1+\Delta)\times u=(1+\xi\partial.+\frac{1}{1.2}\xi^2\partial^2.+\frac{1}{1.2.3}\xi^3\partial^3.+etc.)\times u \quad \text{ou encore} \quad (1+\Delta)\times u=e^{\xi\partial.}\times u$$

Les *caractéristiques* du calcul différentiel sont désormais l'objet d'un calcul direct, analogue à celui qui concerne les *quantités* du calcul algébrique. Les travaux d'Arbogast, comme ceux de ses amis Servois ou J-F Français, trouveront un écho favorable au sein de l'école algébrique anglaise. En France, Cauchy s'opposera à ce point de vue formel, et il n'admettra un calcul sur les opérateurs que dans les cas où il est dûment justifié par des égalités numériques. (ces dernières étant d'ailleurs obtenues, le plus souvent, au moyen d'intégrales : intégrales de Fourier, intégrale de Cauchy...).

Après la diffusion de l'algorithme de Leibniz, les progrès restent lents en matière de calcul intégral. À ceux qui s'impatientent devant l'absence de méthodes générales pour résoudre les équations différentielles, Leibniz répond en invoquant le précédent des équations algébriques : on ne dispose de formules générales que pour les degrés inférieurs à 5. Dans le mémoire de 1710 déjà cité, l'analogie se fait plus précise : *il arrive que les solutions algébriques* d'une équation différentielle soient données par des *formules transcendantes* [35] ; de même, pour une équation algébrique, une formulation *irrationnelle* cache parfois une solution *rationnelle*[36]. Et la terminologie de Leibniz contient des éléments qui se correspondent dans leur champ respectif :

calcul algébrique	*la puissance de n'importe quelle quantité*	*l'extraction d'une racine à partir d'une puissance*	*les grandeurs rationnelles*	*les grandeurs sourdes*
calcul différentiel et intégral	*la différence, c'est à dire l'Élément, de toute quantité variant selon une loi déterminée*	*la sommation d'un terme à partir de sa différence*	*les grandeurs algébriques*	*les grandeurs transcendantes*

Il faut attendre les années 1830 pour retrouver l'évocation d'une analogie entre les deux types d'équations, elle est le fait de Libri ; du côté des équations différentielles, seules les équations linéaires sont concernées[37]. Pour une telle équation, supposée d'ordre m, Libri note que la connaissance de p solutions permet de ramener sa résolution complète à une équation d'ordre $m-p$. Et il ajoute : *Le principal mérite de ce théorème consiste dans l'analogie qu'il établit entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ordinaires dont*

[35] On peut penser par exemple à l'équation $y'-y=x$: la solution générale écrite $y=e^x\int xe^{-x}dx$, *transcendante*, englobe une solution particulière *algébrique* $y=(-x-1)$.

[36] On peut penser à l'équation $y^3+3y+4=0$, la solution $x=-1$ est donnée par la formule de Cardan sous la forme $x=\sqrt[3]{-2+\sqrt{-5}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{-5}}$.

[37] Leurs coefficients ne sont pas nécessairement constants.

on peut abaisser le degré d'autant d'unités que l'on connaît de racines [Libri, 1839]. La démonstration de ce théorème figurait dans une lettre de d'Alembert de 1766. Mais, avant Libri, personne n'avait souligné l'analogie qu'il faisait apparaître. Il est pourtant assez simple de constater qu'elle est étroitement liée à la méthode de variation de la constante, par ailleurs très utilisée par Lagrange. Elle est aussi très visible si l'on utilise une « formule de Taylor » des opérateurs linéaires, parallèlement à celle des polynômes. En 1808, Brisson a mis en évidence une telle formule, mais il ne l'a pas utilisée dans ce but. L'idée sera reprise par Brassine en 1864.

Fondée sur les idées de Leibniz, l'analogie entre calcul algébrique et calcul différentiel et intégral va au cours du XIX^{e}. siècle se développer en suivant deux branches : d'un côté, le calcul sur les expressions formelles aboutissant au calcul sur les opérateurs, esquissé ci-dessus, de l'autre, l'approfondissement et l'explicitation (via la théorie de Galois) de l'analogie entre équation algébrique et équation différentielle linéaire citée par Libri. J.Liouville, dans la première moitié du XIX^{e} siècle est à la charnière.

Après Cauchy la méfiance est forte vis-à-vis des résultats dépendant de la convergence des séries infinies et l'époque est à l'algébrisation de l'analyse ; l'objectif vis-à-vis des équations reste leur résolution. Liouville développe pour le calcul intégral et la résolution des équations différentielles un processus d'algébrisation qui est un travail sur des expressions formelles explicites ou implicites, mais qui cherche à percer le mystère de la relation entre la forme de l'expression soumise au calcul ou celle de l'équation différentielle et la forme possible de la solution.

Il s'appuie sur une analyse du fonctionnement du calcul intégral en lui-même, tel qu'il a pu être exploré par Euler (*Institutiones calculi integralis*, 1768) et systématisé par Condorcet (*Du calcul intégral*, 1765 et Recherches de calcul intégral, 1772). Leibniz et Bernoulli avait ouvert la voie à une intégration systématique des fractions rationnelles en utilisant la décomposition en éléments simples, mais le calcul intégral restait un art et beaucoup d'intégrales ne se laissaient pas réduire à des intégrales plus simples ; Condorcet en cherchant à établir une théorie algébrique de l'intégration, amorce le traitement de la question de savoir comment la forme de l'intégrale est liée à la forme de la fonction et notamment pour quelles fonctions algébriques l'intégrale est-elle algébrique.

Une autre source fondamentale est le travail d'Abel. Le mémoire d'Abel paru au journal de Crelle en 1826 « *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré* » répond au problème d'écrire les racines d'une équation algébrique comme fonction algébrique de ses coefficients, c'est-à-dire pour Abel, comme une expression des coefficients dans laquelle n'entrent que les opérations de l'arithmétique et l'extraction de radicaux d'indices premiers. Ce résultat a eu un double apport. Il modifie le point de vue sur les équations, il s'agira d'abord de savoir si l'obtention de solutions d'un type donné est possible, ensuite, en cas de réponse positive il faudra les produire. Sur le plan technique, la démonstration se déroule par identification après avoir exhiber la forme la plus générale d'une fonction algébrique des coefficients et cela amène Abel à construire une classification de la valeur de ces formes par rapport à la complexité de leur écriture la plus simple ; un couple de deux entiers représente ainsi une classe, ouvrant la voie à des récurrences descendantes, comme pour le degré d'un polynôme.

Liouville transporte au domaine de l'intégration les méthodes d'Abel : il étalonne de façon similaire le champ des fonctions transcendantes pour repérer les formes des solutions des équations différentielles, les fonctions y sont des objets sans valeurs numériques, définis par des signes ayant certaines propriétés, parmi lesquels est incluse la dérivation.

Pour préciser ce propos, il suffit de suivre la démarche de Liouville à travers deux mémoires « *Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* » et un mémoire « *Sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients* ».

L'objet des deux premiers mémoires cités est clair : « *Etant donnée une fonction algébrique quelconque* $f(x)$*, on pourra toujours décider si elle a ou n'a pas pour intégrale une fonction algébrique, et si la question est résolue affirmativement, le même procédé fera connaître la valeur de* $\int f(x)dx$ ». Ils posent une sorte de base à l'édifice qui va suivre en clarifiant ce que sont les fonctions algébriques, explicites d'abord puis implicites : aux nombres rationnels dans le cas numérique sont substituées les fractions rationnelles de la variable x dans le cas des fonctions, la possibilité de transformation des formules est plus grande car l'opération de dérivation, qui reproduit les radicaux peut servir à explorer la complexité des formules et être outil d'élimination.

Au résultat d'Abel : « *Si une équation est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à la racine une forme telle que toutes les fonctions algébriques dont elle est composée puissent s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.* » fait pendant le résultat de Liouville : « *La valeur de* $\int ydx$ *quand elle est algébrique se trouve égale à une fonction rationnelle de x et y* ». Dans ce cas, Liouville en donne effectivement la forme polynomiale en y.

Les méthodes du domaine algébrique des nombres sont transposées : polynôme minimal, utilisation des racines conjuguées, réduction de l'expression possible des solutions qui amène à penser le calcul par étapes, et où à chaque étape le domaine des coefficients sur lequel on travaille diminue. Un corollaire apparaît : les intégrales elliptiques, dont le calcul jusqu'ici résiste, ne sont pas algébriques.

Mais l'intégration de fonctions aussi simples que les fractions rationnelles peut introduire des logarithmes et force est de sortir du champ algébrique. Liouville introduit un point de vue constructif sur les transcendantes à l'image de l'édifice des fonctions algébriques à partir des fractions rationnelles et fondé sur la connaissance formelle des fonctions algébriques qu'il a contribué à solidifier. On y retrouve deux modes de définition, l'explicite à partir d'opérations qui peuvent être alors d'un type transcendant bien défini et l'implicite : « *est fonction finie explicite de x lorsqu'on peut écrire l'expression en indiquant explicitement sur la variable x un nombre limité d'opérations algébriques, exponentielles et logarithmiques* » et « *une fonction finie est implicite, lorsqu'elle dépend d'équations finies, non résolubles explicitement* » (par exemple y racine de $\log y = xy$ est fonction finie implicite de x).

L'étalonnage est encore une fois nécessaire pour repérer si une transcendante fait partie ou non de cette collection, il est transposé de celui d'Abel . L'époque est aux classifications et le mot " espèce "emprunté aux sciences naturelles, désigne l'un des deux entiers mesurant la complexité d'une expression une fois réduite : une fonction finie transcendante est de première espèce si les signes relatifs aux opératoires transcendantes dont elle dépend, portent sur de simples fonctions algébriques, elle est de deuxième espèce si ces signes portent sur des fonctions de première espèce etc. Pour une fonction d'une espèce n donnée, l'autre entier de repérage est le nombre minimum de " monômes " de cette espèce (expressions de la forme expu ou logu dans laquelle u est d'espèce (n-1)) entrant dans son expression. La fonction mise sous cette forme jouit alors de propriétés semblables à celle des polynômes irréductibles et c'est ce qui est utilisé pour montrer la faisabilité et la cohérence d'une telle construction ; au fil des démonstrations et des calculs se mettent en place des notions qui dans un cours algébrique moderne prendraient le nom d'extension transcendante, d'indépendance linéaire ou d'indépendance algébrique sur un corps, d'extension élémentaire, etc.

Armé de cette classification, Liouville démontre dans d'autres mémoires, la condition pour qu'une fonction ait une intégrale finie explicite, ou plus tard pour que certaines équations différentielles du second ordre, puis l'équation de Riccati aient une solution exprimable en termes finis. Cette échelle de complexité est infinie mais elle n'englobe pas toutes les transcendantes et les transcendantes elliptiques fonctions de leur module y échappent !

Les travaux de Liouville sur l'intégration en termes finis occupent la période 1833 - 1841. C'est en 1846 qu'il fait paraître dans le journal qu'il dirige les œuvres mathématiques d'E. Galois ; il en a perçu l'importance, mais cela ne l'a pas amené à revenir avec ce nouveau point de vue sur ce qu'il avait produit quelques années auparavant. A travers Liouville s'opère la construction pied à pied d'une analogie entre le domaine algébrique des nombres et des polynômes ou l'inversion des puissances conduit aux fractions rationnelles et aux radicaux et celui des fonctions transcendantes ordonné par les exponentielles et les logarithmes, soumis au calcul différentiel et intégral, cette analogie se lit dans les objectifs affichés, la structure de la construction et les méthodes de calcul. Mais son objet reste toujours de saisir de manière la plus effective possible la solution des équations, et il cherche une grande théorie à l'image de l'algèbre qui engloberait les opérations de l'analyse sur les fonctions : « *Cette théorie a pour objet de découvrir, dans chaque question, toutes les solutions qui peuvent s'écrire à l'aide d'un nombre limité de signes analytiques donnés d'avance, ou à prouver qu'il n'existe pas de telles solutions. Seule elle peut conduire à une classification vraiment philosophique des transcendantes.*»

BIBLIOGRAPHIE I

ABEL Niels Henrik

[1826] Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré, *Journal für die reine und augewandte mathematik (journal de Crelle)*- Œuvres complètes Tome I.

ALEMBERT J. Le Rond d'

[1766] Extraits de différentes lettres de M. d'Alembert à M. de la Grange écrites pendant les années 1764 et 1765, *Miscellanea Taurinensia, Mélanges de philosophie et de mathématiques de la Société royale de Turin, (pour 1762-1765)*, tome III, 1766.

ARBOGAST L. F. A.

[1800] *Du calcul des dérivations*, Strasbourg, 1800.

BRASSINE E.

[1864] Analogie des équations différentielles linéaires à coefficients variables, avec les équations algébriques, in *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, 2ème édition, Ch. STURM, Paris, 1864, pp. 331-347.

BRISSON Barnabé

[1808] Sur l'intégration des équations différentielles partielles, *Journal de l'École Polytechnique*, cahier n°14, pp. 191-261.

FRANÇAIS Jacques-Frédéric

[1813] Mémoire tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles de différentiation et d'intégration des fonctions qu'elles affectent, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, III (1812-1813), pp. 244-272.

[1815] Du calcul des dérivations, ramené à ses véritables principes, ou théorie du développement des fonctions, et du retour des suites, *Ibid.*, VI, (1815), pp. 61-111.

LAGRANGE Joseph-Louis

[Œuvres] *Œuvres de Lagrange*, J.-A. Serret et G. Darboux éd., 14 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1867-1892.

[1774] Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, *Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1772*, 1774, *2ème pagination* pp. 185-221 ; *Œuvres* III, pp. 441-476.

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm

Mathematische Schriften, édité par C.I. Gerhardt, réédition Goerg Olms, Hildesheim, 1962.

LIBRI-CARUCCI della SOMMAJA Comte Gugliemo

[1836a] Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales particulières peuvent s'exprimer les unes par les autres, *Journal für die reine und angewandte Math.*, Band 10, 1836, pp. 167-194.

[1836b] Sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations linéaires aux différentielles et aux différences, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 1, 1836, pp. 10-13.

[1839] Mémoire sur la théorie générale des équations différentielles linéaires à deux variables, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tome 8, tome 8, 1839, pp. 732-741.

LIOUVILLE Joseph

[1833b,c] Mémoires sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 14 (22ème cahier).

[1837d] Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients, *Journal de mathématiques pures et appliquées (journal de Liouville)*, II(1837) et III(1838).

[1840i] Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et seconde espèce considérées comme fonction de leur module, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, V (1840).

SERVOIS François-Joseph

[1814a] Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, V (1814), pp. 93-140.

[1814b] Réflexions sur les divers systèmes d'exposition du calcul différentiel et, en particulier, sur la doctrine des infiniment petits, *Ibid.*, pp. 141-170.

BIBLIOGRAPHIE II

DEAKIN Michael A.B

[1981] The development of the Laplace Transform 1737-1937, 1. Euler to Spitzer 1737-1880, *Archive for History of exact Sciences*, vol. 25 n°4, 1981, pp. 343-390.

[1982] The development of the Laplace Transform 1737-1937, 2. Poincaré to Doetsch 1880-1937, *Archive for History of exact Sciences*, vol. 26 n°4, 1982, pp. 351-381.

DEMIDOV S.S.

[1983] On the History of the Theory of Linear Differential Equations, *Archive for History of exact Sciences*, vol. 28, 1983, pp.369-387.

DURAND-RICHARD Marie José

[1990] Genèse de l'algèbre symbolique en Angleterre : une influence possible de John Locke, *Revue d'Histoire des Sciences*, 1990, XLIII/2-3, pp. 129-180.

FRIEDELMEYER Jean-Pierre

[1994] Le calcul des dérivations d'Arbogast et le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du XVIIIème siècle, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n°43, 1994.

GILAIN Christian

[1988] Condorcet et le calcul intégral, in *Sciences à l'époque de la révolution française-recherches historiques*- équipe REHSEIS , édité par R.Rashed.

KNOBLOCH Eberhard

[1991] L'analogie et la pensée mathématique, in *Mathématiques et Philosophie de l'Antiquité à l'âge classique*, édité par Roshdi Rashed, Paris, 1991, pp. 217-237.

LUBET Jean-Pierre

Quelques aspects de l'Analyse à l'époque de Lagrange, le rôle des analogies, Université de Lille I, 2001.

LUSTERNIK L. A. et PETROVA Svetlana S.

[1972] Les premiè*res étapes du calcul symbolique*, Revue d'Histoire des sciences XXV, 3, 1972, pp. 201-206.

LÜTZEN Jesper

[1990] Joseph Liouville, Master of pure and applied mathematics, S*pringer- Verlag*.

PANZA Marco

[1992] la forma della quantità, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 1992.

PARMENTIER Marc

[1989] *G. W. Leibniz, la naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta Eruditorum*, Vrin, Paris, 1989.

PETROVA Svetlana S.

[1993] Cauchy et le calcul symbolique, *Sciences et techniques en perspective*, 26, 1993, pp. 148-154.

Analogie entre le calcul différentiel et le calcul algébrique 2^{e} partie

Rudolf Bkouche
Université de Lille 1

Présentation :

La théorie de Galois des équations différentielles montre le double rôle de l'analogie dans l'unification des mathématiques. D'une part on montre des analogies de méthodes ou de structures entre divers domaines des mathématiques, ici les équations algébriques et les équations différentielles, ainsi les remarques de Leibniz sur l'intervention des coefficients binomiaux ou les travaux de Liouville tels qu'ils ont été expliqués dans la première partie de cette intervention. D'autre part on essaie de transporter des méthodes d'un domaine dans un autre ce qui permet de montrer la force de l'analogie dans l'élaboration des connaissances mathématiques, on peut alors considérer que c'est cette seconde version de l'analogie qui conduit Picard à recopier, mutatis mutandis, le premier mémoire de Galois pour construire la théorie de Galois des équations différentielles, celle que l'on appelle aujourd'hui la théorie de Picard-Vessiot. En jouant de l'analogie dans l'autre sens, Vessiot mettra en évidence ce qu'il y a de commun au cas algébrique et au cas différentiel avec la notion de système automorphe, réalisant en partie l'unification espérée par Liouville. Ce travail se poursuivra au XXème siècle avec le développement de la géométrie algébrique "à la Grothendieck", laquelle prolonge la dialectique algébrisation-géométrisation qui apparaît dans les idées de Descartes et de Fermat". On peut alors penser une théorie de Galois générale qui contient la théorie des équations algébriques et la théorie des équations différentielles ainsi que d'autres choses aussi belles que délectables dont nous ne pouvons parler ici et qui marque l'un des aboutissements de ce que l'on peut appeler de façon générale la pensée métaphorique, plus forte me semble-t-il, que la simple analogie, qui marque les mathématiques contemporaines.

L'analogie dans la théorie des fonctions algébriques de Dedekind et Weber

Sonia Couche
doctorante au laboratoire d'Histoire des Sciences et Epistémologie de Lille 1
sonia.couche@univ-lille1.fr

L'article de Dedekind et Weber *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen* de 1882 est connu pour développer une analogie entre les fonctions algébriques et les nombres algébriques. Dedekind et Weber y développent une arithmétique des fonctions algébriques "importée" de la théorie des nombres algébriques, qui leur permet de retrouver algébriquement les résultats de la théorie géométrique de Riemann des fonctions algébriques. Cette théorie conceptuelle, totalement novatrice, comporte des exceptions concernant les singularités et recourt à l'intuition géométrique dans les questions de continuité ou d'analycité. Afin de combler ces lacunes, Dedekind et Weber abordent l'étude des fonctions algébriques avec un point de vue arithmétique et s'inscrivent ainsi dans le mouvement d'arithmétisation des mathématiques de la fin du XIXᵉ siècle.

L'analogie chez Dedekind et Weber ne se réduit néanmoins pas à l'analogie entre nombres et fonctions. Une lecture plus attentive permet de dégager une autre analogie dans leur travaux, plus discrète et subtile, qui, par l'emploi analogique du mot «point», conjugue rigueur algébrique et intuition géométrique. Si cette analogie est moins apparente et son action quasi souterraine, il ne faut pas pour autant négliger son intérêt provenant, en partie, de ce qu'elle est implicite et non revendiquée.

Nous proposons comme point de départ la définition suivante : l'analogie établit une correspondance vraisemblable des savoirs[38], ces savoirs pouvant être des notions, des théorèmes, des méthodes mais aussi des intuitions au sens d'un savoir immédiatement saisi par l'esprit. A partir de cette définition générale, générique en quelque sorte, il s'agit d'expliciter la pluralité de l'analogie en précisant ses différents domaines d'intervention ainsi que ses différents modes de fonctionnement.

1. L'analogie entre nombres algébriques et fonctions algébriques

Les ressemblances entre nombres entiers et polynômes sont nombreuses : dans un cas comme dans l'autre, on a une division euclidienne, un entier se décompose de façon unique en produit de nombres premiers comme un polynôme se décompose de façon unique en produit de polynômes irréductibles . . .

Jusqu'à la fin du XIXᵉ siècle, il ne s'agit que de constatations sur deux domaines qui se sont développés indépendamment l'un de l'autre et qui n'engagent pas de recherches ma-

[38] *Encyclopédie philosophique universelle*, publiée sous la direction d'André Jacob, volume II *Les notions philosophiques Dictionnaire*, tome I, p. 82.

thématiques particulières. Elles sont même assez rarement mentionnées, mais on peut néanmoins raisonnablement penser que ces similitudes sont communément connues à l'époque. Le fait de dégager ces ressemblances opératoires qui laissent penser à une certaine unité de structure des entiers rationnels d'un côté et des polynômes de l'autre relève bien de l'analogie, mais d'une analogie "passive" pourrait-on dire.

L'article de Dedekind et Weber *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen* de 1882 marque en ce sens un tournant puisque l'analogie y est un moyen d'investigation effectif de la théorie des fonctions algébriques.

Dedekind et Weber annoncent dès l'introduction :

> Pour le cas général [des fonctions algébriques d'une variable], qui se comporte vis-à-vis (...) du cas [de la théorie des fonctions rationnelles d'une variable], comme le cas des nombres algébriques définis de façon la plus générale, vis-à-vis du cas des nombres rationnels, les méthodes, appliquées avec le plus grand succès dans la théorie des nombres, qui se rattachent à la création de *Kummer* des nombres idéaux, et qui sont susceptibles d'un transfert à la théorie des fonctions, montrent la voie.[39]

Le mot d'analogie n'est pas encore dit mais la figure de l'analogie de proportions est clairement présente. Ils construisent une théorie des fonctions algébriques qui soit à la théorie des fonctions rationnelles comme la théorie des nombres algébriques l'est à la théorie des nombres rationnels.

$$\frac{\text{théorie des nombres algébriques}}{\text{théorie des nombres rationnels}} = \frac{\text{théorie des fonctions algébriques}}{\text{théorie des fonctions rationnelles}}$$

Par ailleurs, les deux mathématiciens nous donnent le mode de fonctionnement de l'analogie : un transfert, qui s'avérera massif, de notions et de méthodes du domaine numérique au domaine fonctionnel.

Pour comprendre le rapport entre théorie des fonctions algébriques et théorie des fonctions rationnelles, il faut donc se tourner vers la généralisation des théorie des nombres algébriques à partir des nombres rationnels.

L'origine des idéaux La notion d'idéal a été crée par Dedekind en 1871 dans sa théorie des nombres algébriques publiée comme dixième supplément des *Vorlesungen* de Dirichlet.

Ses recherches s'inscrivent dans le prolongement de celles de Kummer sur un certain type d'entiers algériques : les entiers cyclotomiques $a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1}$ où les a_i sont des entiers relatifs et ζ une racine primitive n^{e} de l'unité[40]. Dirichlet avait mis en évidence une rupture d'analogie avec l'arithmétique de $\mathbb{Z}$ que Dedekind commente ainsi :

> Ce résultat [la décomposition d'un entier en un nombre fini d'éléments premiers] correspond encore totalement à la loi qui a lieu dans la théorie des nombres entiers rationnels ou complexes, savoir que tout nombre composé peut être représenté par le produit fini

[39]Dedekind R. u. Weber H., "Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen", Journ. de Crelle, 1882, vol. 92, pp. 181-182.

[40]Kummer est motivé par la démonstration du théorème de Fermat, c'est-à-dire de l'impossibilité de l'équation $x^n + y^n = z^n$ pour n supérieur à 2. Une piste était de factoriser $x^n + y^n$ sous la forme $(x+y)(x+\zeta y)\dots(x+\zeta^{n-1}y)$

> de facteurs premiers ; mais en même temps c'est ici le point où l'analogie, observée jusqu'ici, avec l'ancienne théorie menace de se rompre pour toujours.[41]

Pour retrouver l'unicité de cette décomposition, et par là prolonger l'analogie entre les nombres entiers rationnels et les entiers cyclotomiques, Kummer propose d'introduire des facteurs idéaux. Ces facteurs idéaux sont en fait des nombres complexes qui n'appartiennent pas à l'ensemble des entiers cyclotomiques étudiés, mais dont l'utilisation permet de récupérer l'unicité de la décomposition en éléments irréductibles. Ainsi Kummer réussit à conserver l'analogie avec les entiers rationnels, mais au prix d'une sortie de l'ensemble de départ. Par ailleurs, Kummer ne donne pas de définition commune des facteurs idéaux.

Dedekind va plus loin dans l'analyse du problème et règle la question de l'existence des nombres idéaux. Dedekind considère à la place des facteurs idéaux premiers tous les éléments du domaine numérique de départ divisibles par ce facteur idéal. Sur le même principe, il "remplace" un élément du domaine numérique par l'ensemble de ces facteurs. Après avoir explicité le calcul sur ces nouveaux objets mathématiques, Dedekind développe une arithmétique sur ces systèmes de nombres semblable à celle de $\mathbb{Z}$. En hommage aux facteurs idéaux de Kummer, Dedekind appelle ces systèmes des « idéaux ». Il montre en particulier que tout idéal premier se décompose de façon unique en produits d'idéaux premiers.

L'élaboration de la notion d'idéal et d'une théorie générale des nombres algébrique a donc été guidée par l'analogie avec la théorie des nombres entiers rationnels, cette analogie étant pensée par Kummer, puis par Dedekind comme une unité des lois de divisibilité dans le domaine des nombres algébriques et celui des nombres rationnels. Dedekind parle également de correspondance, de conservation, de parfaite conformité des lois. Il s'agit donc d'une analogie qui met en correspondance la "structure" de la divisibilité des différents types de nombres lorsque cette correspondance existe (dans les anneaux factoriels) et qui, lorsque cette correspondance fait défaut, devient heuristique en donnant les jalons[42] d'une nouvelle théorie qui ferait apparaître une telle correspondance.

Une analogie d'analogie Ainsi le rapport de l'analogie de proportion

$$\frac{\text{théorie des nombres algébriques}}{\text{théorie des nombres rationnels}} = \frac{\text{théorie des fonctions algébriques}}{\text{théorie des fonctions rationnelles}}$$

est certes une généralisation mais aussi une analogie. Et lorsque Dedekind et Weber se proposent de généraliser la théorie des fonctions rationnelles en une théorie des fonctions algébriques par analogie avec la théorie des nombres algébriques, ils font une analogie d'analogie.

Cette analogie multiple se révèle particulièrement complète au sens où non seulement les définitions, les théorèmes ont leurs analogues mais pratiquement tous les résultats intermédiaires. C'est une analogie que l'on peut suivre pas à pas en changeant le mot nombre par celui de fonction !

---

[41] Dedekind R., "Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques", Paris, Gauthier-Villars, 1877 in *Über der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*„ Braunschweig, Frier. Vieweg & Sohn, 1964, p. 263. (à repréciser cf. livre)

[42] L'analogie n'impose pas un chemin, elle est simplement un canevas. Kummer et Dedekind propose deux "tissage" différents pour répondre au défaut de factorialité de certains anneaux) et Kronecker en proposera un autre en 1882 dans ses *Grundzüge*.

Transfert lexicaux L'analogie entre nombres et fonctions s'accompagnent de différents transferts lexicaux[43].

Les termes de structures algébriques (corps, idéal, module...) utilisés dans l'exposé de Dedekind et Weber proviennent *in extenso* de la théorie des nombres algébriques de Dedekind. Si l'on parle d'analogie entre nombres algébriques et fonctions algébriques pour désigner le transfert de méthodes, on ne peut guère parler d'un transfert analogique de ces termes. En effet, il n'y a pas de subversion sémantique dans ce transfert : ni déperdition, ni généralisation de sens mais un déplacement de cadre. Par une reconstruction conceptuelle, on retrouve les mêmes structures dans les domaines numériques et fonctionnels. Un idéal de nombres algébriques et un idéal de fonctions algébriques ne se distinguent pas par leur structure, mais par la nature de leurs éléments.

L'unité du langage s'oppose à la diversité des théories. Ainsi l'analogie et le transfert conceptuel de vocabulaire, en faisant apparaître une syntaxe commune aux théories numérique et fonctionnelle, font la part entre l'unité conceptuelle et la diversité phénoménale et présage l'émergence de notions algébriques générales à l'existence séparée de celles de nombres et de fonctions et qui s'incarneraient dans les différentes théories.

Il existe un autre transfert lexical, celui des termes de relations entre les idéaux, qu'ils soient constitués de nombres ou de fonctions. Dire qu'un idéal $\mathfrak{a}$ divise un idéal $\mathfrak{b}$ signifie que $\mathfrak{b}$ est inclus dans $\mathfrak{a}$. Ainsi la divisibilité des idéaux relève de la notion d'inclusion. Le transfert des termes d'arithmétique (divisibilité, produit, quotient...) du domaine des nombres entiers naturels aux domaines des idéaux est donc un transfert analogique. Le langage familier a une action intégrative dans la création d'un intuition arithmétique qui, par la référence à l'arithmétique familière et assimilée des nombres entiers rationnels, permet d'intégrer plus aisément les nouveaux concepts et problématiques de la théorie des idéaux.

2. La notion de point

Dans la première partie de l'article, Dedekind et Weber développent une arithmétique des fonctions algébriques analogue à l'arithmétique des nombres algébriques. L'analogie s'appuie sur - et favorise donc - une saisie extrinsèque de la fonction algébrique au travers du corps auquel elle appartient : une fonction n'est pas considérée comme une relation entre deux ensembles numériques mais comme élément d'un ensemble de fonctions qui fait l'objet d'un calcul algébrique. L'étude locale des fonctions intervient dans la seconde partie de l'article. Elle est algébrisée grâce à la notion algébrique de point.

Un point, noté $\mathfrak{P}$, est une sorte d'application qui, à chaque fonction α du corps de fonctions algébriques considéré, attribue une valeur numérique α_0 de façon à ce que

1. $\alpha_0 = \alpha$, si la fonction α est une constante,
2. $(\alpha \pm \beta)_0 = \alpha_0 \pm \beta_0$,
3. $(\alpha\beta)_0 = \alpha_0\beta_0$,
4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$.

[43]En parlant de transferts lexicaux, je me réfère à un article de Claude Blanckaert de 1988 «*Variations sur le darwinisme. Epistémologie et transfert lexical*». Je reprends la distinction qu'il établit entre métaphore, transfert analogique et transfert conceptuel qui convient particulièrement bien aux différents types de transferts que j'ai pu relever dans l'article de Dedekind et Weber.

Les points sont ainsi définis qu'en chacun d'eux, les relations algébriques entre les fonctions de Ω se spécialisent en un ensemble de relations numériques exactes qui respectent les liens algébriques des fonctions du corps.

Emploi métaphorique du mot point Le point est un concept purement algébrique qui est néanmoins désigné par un terme géométrique. Dedekind et Weber explique ce choix lexical comme la *possibilité* de rendre sensible la conjonction de valeurs que désigne le point en se l'imaginant comme un point dans l'espace, c'est-à-dire un "vrai" point géométrique. Ils précisent néanmoins en note

> « Une visualisation géométrique du "point" n'est par ailleurs aucunement nécessaire, et contribue très peu à une conception plus facile. Il suffit de considérer le mot "point" comme une expression courte et agréable pour la coexistence de valeurs décrite. »[44]

Le terme de point ne serait donc qu'un raccourci, tout au plus une métaphore, selon Claude Blanckaert, une

> « image qui fait immédiatement sens (...) [et] témoigne, dans le caractère spontané de son usage, d'une faible articulation conceptuelle»[45]

Dedekind et Weber ont fait une théorie essentiellement algébrique. Faire abstraction de la référence géométrique du terme de point et le remplacer par un mot sans connotation géométrique, tel que système de valeur, ne diminuent en rien la rigueur et la validité des travaux des deux mathématiciens. Ceci résulte de leur volonté, accomplie, de travailler dans la sphère de l'algèbre sans avoir recours à l'intuition géométrique dans les fondements ou les démonstrations de leur théorie. Néanmoins, sans se compromettre vis-à-vis de cette ligne de conduite, Dedekind et Weber ne ferment pas totalement la porte à la géométrie : ils ne nient pas le rôle pédagogique des images géométriques, sorte de lunettes 3D qui donnent un relief géométrique (artificiel) à leur raisonnement algébrique abstrait.

L'interprétation métaphorique du point se justifie donc parfaitement. Peut-être un peu trop au vu de la relative ambiguïté qui transparaît dans l'explication de ce choix lexical. Dans le corps du texte, Dedekind et Weber proposent de voir dans ce mot une visualisation du concept algébrique et en note, ils reculent devant cette interprétation géométrique pour n'y voir plus qu'une sorte d'abréviation. Ceci est d'autant plus étonnant que le point qu'ils définissent n'est pas n'importe quel point comme ils l'affirment : Dedekind et Weber définissent le correspondant algébrique du point de la surface de Riemann, ce qu'ils expliquent dans l'introduction de l'article et rappellent un peu plus tard.

Emploi analogique du mot point Le principe de la surface de Riemann est de faire passer la multiformité d'une fonction à son support : Riemann dédouble le plan complexe en feuillets et les raccordent de façon à ce que la fonction qu'il considère y soit continue.

En ayant à l'esprit la surface de Riemann, le choix lexical du mot "point" prend une toute autre dimension, plus profonde que celle métaphorique. On peut avancer l'hypothèse

[44] Dedekind u. Weber, "Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen", in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. , 1882, p. 236.

[45] Claude Blanckaert, "Variation sur le darwinisme-Epistémologie et transfert lexical" in *Transfert de Vocabulaire dans les sciences*, sous la direction de Jacques Roger, Edition du CNRS, Paris, 1988, p. 11.

d'une interprétation alternative du mot point, à la portée conceptuelle plus profonde que la métaphore et sur laquelle s'appuient Dedekind et Weber pour construire leur propre "surface algébrique" : en étudiant les points du corps de fonctions algébriques par rapport à une fonction, ils dégagent une structure de l'ensemble des points. Or cette structure prend corps grâce à l'importation par le biais du terme de point des problématiques géométriques de la surface de Riemann.

Il y a, en effet, des références implicites à cette surface. L'organisation des points selon une fonction repose sur la notion d'ordre qui est relative à cette fonction. Regardons attentivement la terminologie de cette notion :

$w - c$ est infiniment petit d'ordre r en $\mathfrak{P}$
$w - c$ est 0^r en $\mathfrak{P}$: w a la valeur c r fois en $\mathfrak{P}$
$w - c$ est 0 en $\mathfrak{P}^r$: w a la valeur $c0$ en r points coïncidant avec $\mathfrak{P}$

Le glissement de terminologie reflète un dédoublement *virtuel* de points : il s'agit en fait d'une pondération des points plus qu'un dédoublement effectif de points. Dedekind et Weber ne parlent d'ailleurs jamais de dédoublement mais de points coïncidants, confondus. Mais ils donnent ainsi l'*image* d'un dédoublement pour expliquer la pondération des points : un point où une fonction est d'ordre r est comme r points coïncidants où la fonction serait d'ordre 1. Subrepticement, par les *mots*, Dedekind et Weber font passer la multiplicité de l'ordre, c'est-à-dire de la fonction, au point. Ce faisant, ils importent et calquent sur leur raisonnement algébrique, une problématique de la théorie riemannienne : faire passer la multiplicité de la fonction à son support.

Ce dédoublement permet de saisir intuitivement la notion de point de ramification, sorte de point "éclaté puis effondré" : le dédoublement est comme une parenthèse où le point se démultiplie avant de s'effondrer sur lui-même, retrouvant son unité, mais devenu plus "lourd" par rapport à la fonction choisie.

Le transfert des problématiques géométriques dans le champ algébrique, qui ne peut se faire qu'au travers du mot point et de son potentiel géométrique, fait apparaître en filigrane la structure d'une surface de Riemann. La notion de point de ramification aboutit à une organisation des points du corps de fonctions algébriques que l'on peut représenter ainsi

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\cdots & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots \\
\cdots & \circ & & \circ & \circ & \bullet & \circ & & \circ & & & \circ & \circ & \circ & & \cdots \\
\cdots & \circ & \bullet & \circ & \circ & & \circ & & \circ & \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ & & \cdots \\
\cdots & \circ & & \circ & & \bullet & \circ & \bullet & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \cdots \\
\cdots & \circ & \circ & \circ & \bullet & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \circ & \cdots
\end{array}$$

Dedekind et Weber sont donc parvenus à un ensemble de points structuré en étages dont certains se rejoignent aux points de ramification (points noirs ci-dessus). On voit alors apparaître une structure discrète de feuillets avec ramification.

S'il ne faut pas visualiser le point algébrique de Dedekind et Weber par un point quelconque mais par le point de la surface de Riemann, il ne s'agit pas non plus d'importer de la théorie riemanienne de simples images géométriques. Le mot « point » véhicule une intuition géométrique qui se différencie des simples images par son caractère opératoire : par le biais du terme de point, la surface de Riemann illustre et aide à formaliser par ses problématiques géométriques les problématiques algébriques. Elle permet de saisir d'un coup la démarche algébrique de Dedekind et Weber.

On voit alors réapparaître l'analogie, sous une nouvelle forme, dans le transfert de vocabulaire. Il ne s'agit certes pas d'une analogie entre les théories algébrique et géométrique des fonctions algébriques, qui traitent simplement le même sujet avec deux approches différentes comme l'on peut avoir plusieurs démonstrations pour un même théorème. Mais il y a une analogie entre le point de vue géométrique de Riemann et le point de vue algébrique de Dedekind et Weber. Le mot point et la notion qu'il recouvre est donc le carrefour des influences, des intuitions arithmétiques et géométriques qui viennent s'y mêler et se féconder.

La non revendication de cet usage analogique du mot point révèle peut-être un attachement à l'intuition plus fort que Dedekind et Weber ne le laissent entendre ou même qu'ils ne le voudraient. Accepter l'analogie permet certes de s'ouvrir à un nouveau champ d'intuition mais c'est également prendre le risque de s'y laisser enfermer.

Conclusion

L'un des effets de l'analogie est de brouiller les frontières des disciplines. Mais le rapprochement voire la (con)fusion des disciplines crée un cadre commun arithmético-géométrique qui est plus que la somme de l'arithmétique et de la géométrie. Il y a enrichissement en même temps que fusion.

Si l'analogie disparaît dans le passage, totalement explicité par la notion d'idéal, du domaine rationnel au domaine algébrique, l'analogie entre le domaine numérique et le domaine fonctionnel reste, elle, ouverte. Dedekind et Weber ont développé cette analogie mais n'en donnent pas la clé.

Elle continuera d'être exploitée par Hensel à partir de 1897, dans l'autre sens : le développement en série au voisinage d'un point des fonctions algébriques inspirera ce mathématicien pour créer les nombres p-adiques. Ces nombres p-adiques favoriseront par la suite l'étude d'une théorie intermédiaire entre théorie des nombres algébriques et théorie des fonctions algébriques : la théorie des fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini. L'analogie entre nombres algébriques et fonctions algébriques sera remplacée par deux analogies plus "fortes" qui, selon André Weil, feront de cette théorie des fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini une «plaque tournante» orientant les recherches vers la géométrie algébrique ou vers la théorie des nombres.

Quelques références :

Blanckaert C., "Variations sur le darwinisme. Epistémologie et transfert lexical", in *Transfert de vocabulaire dans les sciences*, sous la direction de Louis P. et Roger J., éditions du CNRS, Paris, 1988.

Boniface J., *Hilbert et la notion d'existence en mathématique*, Vrin, Paris, 2004, p. 77-101.

Dedekind R., *Über der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*,, Braunschweig, Frier. Vieweg & Sohn, 1964.

Dedekind R. u. Weber H., "Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen", *Journ. de Crelle*, 1882, vol. 92, pp. 181-290.

Weil A., "Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques", 1960, in *Oeuvres scientifiques*, pp. 236-240.

Table des matières