Preuve et légitimité

Jean-Michel Salanskis,
Professeur de Philosophie des Sciences, Logique et Épistémologie ;
Université Paris X Nanterre, Département de Philosophie
200, avenue de la République 92001 Nanterre cedex
e-mail : salanski@ext.jussieu.fr

June 3, 2002

Nous partons toujours déjà d'une coutume intellectuelle où ce qui est prouvé se trouve par là même suffisamment justifié et fondé, en sorte que la preuve semble être la source par excellence de toute légitimité : à la limite, il est permis de croire que la preuve est seule à pouvoir donner une quelconque légitimité à des thèses.

Suivant ce premier mouvement, la question de la légitimité de la preuve ne se pose pas et ne peut pas être posée. A l'appui d'une telle façon de voir, de prime abord la plus naturelle, on peut alléguer une sorte d'analyse de l'épreuve fondamentale à laquelle s'expose tout discours, et qui est celle du dialogue : une thèse légitime est une thèse qui résiste à l'épreuve du dialogue, qui tient devant les possibles réfutations qui lui sont opposables dans un dialogue. Mais si l'art de l'emporter dans un dialogue est l'art logique, si la logique est la science des formes d'enchaînement susceptibles d'être contraignantes dans un dialogue, et donc d'amener à l'assentiment l'interlocuteur, alors la preuve en tant que type absolument efficace d'intervention dialogale est clairement la source et la mesure unique de légitimité, ce qui supporte l'épreuve du dialogue est uniquement ce qui est prouvé, la preuve de ce qui est prouvé étant le texte du discours gagnant dans l'interlocution critique.

Si je me tourne maintenant vers la philosophie, il semble clair que sa tradition, pour une large part, endosse ce point de vue fondamental. L'assertion philosophique se présente comme assertion survivant à l'effort critique dépensé contre elle dans des dialogues, en sorte que les thèses philosophiques viennent nécessairement avec leur justification de base, qui coïncide avec leur preuve, délivrée par le texte philosophique où elles affleurent. On soupçonne, depuis fort longtemps, et sans nul doute en tout cas depuis Platon, que la philosophie recèle une faculté de questionnement illimitée, ce qui veut dire en même temps qu'elle est la recherche de légitimation, elle questionne toute chose, donnée, situation en demandant ce qui peut lui tenir lieu de légitimation. Mais selon la perspective de base, la plus simple, que nous avons évoquée ici, la philosophie prend en charge la question universelle de la légitimation en soumettant tout discours et toute prétention à l'exigence de la preuve. La philosophie assume et divulgue ainsi le slogan de la preuve bien au-delà de l'enceinte restreinte où cette exigence est déjà vécue, celle des mathématiques.

Or, c'est bien à la faveur d'une mutation de la répartition de compétence entre mathématiques et philosophie que la question de la preuve se complique, et paraît devoir échapper à la première détermination ici supposée. Pour comprendre, ce qui s'est passé, il suffit de rappeler comment les choses se présentent au moment inaugural pour la contemporanéité philosophique, et qui est le moment kantien. Kant, on le sait, considère que des démonstrations à proprement parler ne sont trouvables que dans les mathématiques. Mais c'est parce qu'une démonstration, pour lui, déroule une nécessité qui est celle de l'*objet*, et non pas de l'application des règles de discours. La philosophie propose bien des preuves, mais ce ne sont *que* des preuves logiques, "acroamatiques" est son terme : elles ne sont pas des démonstrations au sens éminent de la démonstration mathématique, qui est une exhibition de la nécessité de l'objet comme telle. Cette exhibition, on le sait, procède à partir de la "présentation" intuitive de l'objet (la *construction* de son concept), et le circuit passant par l'intuition pure de la preuve est ce qui permet aux théorèmes de la mathématique, aux jugements que gagnent ses preuves, donc, d'être des jugements *synthétiques* : attribuant un prédicat qui renferme un contenu conceptuel excédant celui du sujet auquel on l'attribue.

Résumons nous : dans la situation classique, la preuve est la source de légitimation par excellence, et elle est revendiquée à ce titre comme un fondement nécessaire de toute thèse de la philosophie. Mais la preuve qui est ainsi revendiquée est la preuve logique, considérée comme sèchement discursive et dépourvue des pouvoirs de la preuve mathématique, de la démonstration proprement dite. La philosophie doit produire de la légitimité en toute matière avec ses preuves qui ne sont pas des monstrations, et donc qui ne méritent pas d'être appelées des démonstrations. Cela signifie que la puissance de légitimation est associée à une logique explicitement déterminée comme dénuée de rapport avec l'intuition, ou plutt, entretenant avec elle un rapport d'exclusion : la logique ne joue pas sur la faculté, intrinsèquement intuitive, de figurer l'objet pour les besoins de sa conception[1].

Au vingtième siècle, il me semble que l'on peut dire que l'idée d'une logique d'autant plus ultimement et universellement légitimante qu'elle écarte d'elle la fonction intuitive a été vigoureusement défendue à la suite de Frege, au point d'être érigée en définition d'un courant philosophique se concevant comme l'unique représentant de la rigueur et l'unique truchement du bon accord entre science et philosophie : le courant de la philosophie analytique. Frege place en effet la logique au sommet de l'édifice rationnel, réputant même que la mathématique tombe entièrement sous la dépendance fondationnelle de la

[1]. Cette remarque, nous devons néanmoins la nuancer dans le cas kantien, en raison de ce qui s'appelle *logique transcendantale* : cette logique, nécessairement, a égard à sa façon aux conditions de la présentation. Notre détermination de la légitimation philosophique comme consistant en un prouver logique reste donc valable, même chez lui, elle correspond en tout cas à la dominante de la tradition.

mathématique : c'est ce qu'on appelle son *logicisme*, qui le conduit, en particulier, à définir les nombres entiers en termes strictement logiques et à justifier le principe de récurrence de façon purement logique. Le plaidoyer en faveur du privilège de la logique en matière de légitimation passe, cette fois, par l'argument anti-psychologiste : l'analyse conceptuelle, le discours justifiant, l'argumentation doivent en appeler à ce qui est effectivement partagé par les hommes, ce qui est publiquement déclarable et contrôlable, et qui est, justement, le *langage*, regardé à l'aune des formes suivant lesquelles il prétend à la vérité de manière réglementaire. L'article " Sens et dénotation" nous apprend à négliger, dans notre effort d'analyse et de compréhension, ce qui n'est que le support représentationnel de la pensée, pour ne retenir que la littéralité officielle de l'énoncé, et, plus encore, la forme logique que cet énoncé illustre. Le support représentationnel est variable selon la personne, sa constitution, son caractère, son histoire, il est un contingent psychologique à écarter de la bonne analyse conceptuelle. L'intuition, avec toute la splendeur que lui accorde le système kantien, est rejetée du côté de ce mauvais psychologique : ne se définit-elle pas en termes du témoignage du sujet, comme liée à un ensemble de représentations que celui-ci trouve en lui ? De fait, l'épistémologie des mathématiques et de la physique proposée par la philosophie analytique au moment de son entrée dans l'histoire est une épistémologie systématiquement et rigoureusement anti-intuitiviste : on peut dire que son geste de base est presque toujours d'éliminer du paysage toute référence à l'"esthétique transcendantale" kantienne.

Je voudrais, dans cette intervention, donner une idée des difficultés considérables que ce point de vue sur la logique et la légitimation rencontre aujourd'hui, du moins s'il veut bien être attentif à l'évolution la plus manifeste de la logique au cours du vingtième siècle. Cette évolution, il me semble, a mis en vedette, de beaucoup de manières, l'appartenance de la raison logicienne elle-même à une couche intuitive spécifique. Or, il se trouve qu'un autre courant philosophique avait remarquablement aperçu ce nœud de la logique et de l'intuition, à savoir le courant phéno-mé-no-lo-gique. L'examen de cette affaire de la preuve nous suggère donc, à côté de bien d'autres examens possibles, que l'on aurait tout intérêt à envisager sérieusement la contribution qui peut être celle de la tradition phénoménologique à l'invention d'un nouveau style philosophique bien adapté à ce que nous attendons de la philosophie en ce nouveau siècle. J'entrerai dans mon sujet en évoquant une thèse d'un mathématicien philosophe des mathématiques, Gian-Carlo Rota, qui me semble, d'une part, fort intéressante en elle-même, d'autre part, très instructive pour mon actuel propos.

1 Les mathématiques, science de la trivialité

Dans son article "Mathematics and the Task of Phenomenology"[2], G.-C. Rota nous explique que l'activité principale des mathématiciens n'est pas la résolution

[2]. Cf. *Phenomenology and the formal sciences*, Seebhom, T. M., Follesdal, D., & Mohanty, J. N. (eds), 1991, Dordrecht, Kluwer, 133-138.

de problème, et leur but ultime pas la vérité : ce qu'ils recherchent est plutôt la trivialité, c'est-à-dire une formulation des faits mathématiques tels qu'ils apparaissent dans un certain type d'évidence. Je le cite :

> “ The unthematized assumption that lurks behind such a question is the belief that the activity of the mathematician consists in solving problems and proving difficult theorems on the basis of ingenious axiom systems. Superficially, this appears to be the case. That is, until you begin to observe how mathematicians work, how they react to a proof for example. (...) . The overwhelming majority of research papers, even the very best, are concerned not with proving, but with reproving already known results, they are concerned with displaying a mathematical fact in a different light, with setting up conceptual frameworks wherein an already known result can better be seen to hold.
>
> (...)
>
> What, then, is it that mathematicians do? We realise what it is they do when we observe at which point exactly does this process of reproving and restating *stop*. It will stop when, and only when, a view, i.e. a theory, is found within which the results happen to be evident, in the Husserlian sense of the term.
>
> (...)
>
> Thus it appears that the activity of the mathematician is not that of proving theorem, but another one: that of proving that all theorems are intuitively evident, by an evidence that shall be as close as possible to Kant's ideal of an analytic a priori statement.
>
> Mathematics is not concerned with seeing the truth of mathematical statement. It is concerned with what we commonly call “seeing through”. The distinction between “seeing” and “seeing through” is a basic phenomenological distinction, without which one cannot give a phenomenological description of mathematics. The ideal of mathematics is not truth, but triviality, a triviality that is often achieved at the cost of immense effort”[3].

L'objectif de trivialité, G.-C. Rota en suggère deux peintures philosophiques : d'une part, il le rattache à l'idée husserlienne d'évidence, d'autre part, à la notion kantienne de jugement analytique. Ce qui est évident coïnciderait avec ce qui dit un jugement analytique. Scandaleuse congruence du logique et de l'intuitif, pour un frégéen !

Il m'est arrivé, je crois, de dépeindre la même tendance profonde de la mathématique contemporaine que G.-C. Rota, quoique dans des termes un peu différents. J'observais que le projet général de la mathématique dite “bourbachique” était d'arriver à un exposé des théorèmes et résultats qui efface le moment de l'opacité combinatoire : on cherche un contexte théorique, un jeu de concepts et un choix de connexions fondamentales entre ces concepts, volontiers

[3]. *Op. cit.*, 135-136.

cristallisés dans une reconstruction axiomatique, tels que les résultats autrefois connus par la grce d'une évaluation calculante de la complexité apparaissent désormais comme des vérités spontanément déclarées par le discours émanant de la reconstruction, énonçant ce qu'il en est des concepts et de leurs liens.

Le tableau que je propose rejoint la formulation de Rota en termes kantiens : on veut que les vérités mathématiques apparaissent comme l'énoncé de ce qu'un prédicat est une composante d'un concept, comme des vérités analytiques méritant d'être dites triviales, parce que l'on n'éprouve aucune mise en rapport hardie d'un contenu avec quelque chose qui lui est extérieur en les écoutant. Pour cela, il faut "placer" ces vérités sur fond du bon contexte théorique, les ordonner aux concepts judicieux. la limite, on a le sentiment que Rota, ou moi-même dans les développements que j'évoque, avons l'idée d'une possible reconduction de la certitude mathématique à la recognition de la subsomption (d'un objet sous un concept) ou de l'inclusion (d'un trait conceptuel dans un concept).

Est-ce qu'une telle "vision" rejoint le logicisme frégéen ? Dans son effort pour mettre sur pieds une exposition logique de l'arithmétique, Frege cherche, en effet, à ramener la compréhension et la science de l'arithméticien à la faculté logique de dire et enregistrer subsomption et inclusion (surtout subsomption je crois). Pour lui, tout reconduire à la certitude logique de la subsomption est l'unique façon de se sauver des sortilèges psychologiques des représentations et du sortilège méta-phy-sique de l'intuition (c'est-à-dire, à ses yeux, de la créance subjective accordée à des objets).

La description proposée par Rota ramène peut-être la connais-sance mathématique à une certitude du trivial qui serait de type logique, qui serait certitude de la subsomption ou de l'inclusion, mais cette certitude est pourtant conçue par lui comme de type "évidentiel" : la trivialité est chose vue, éprouvée, sentie, avant que d'être jugée ou que de relever de l'ordre du jugement. Rota rattache la vision sre de la trivialité à l'évidence husserlienne plutôt qu'à la compétence logique de la subsomption frégéenne. En sorte que le motif de l'intuition n'est pas minoré, mais au contraire retrouvé dans cette description de l'activité mathématique. la vérité, Rota veut avant tout nier que la mathématique s'identifie au travail dérivationnel dans un système logique. On peut et on doit, je crois, entendre que le but ultime des démonstrations mathématiques est de faire voir, à la faveur de la "trivialité" obtenue, la configuration objective propre à une région.

Stimulé par le décalage vis-à-vis des thèses et conceptions communément et trop facilement admises que nous apporte la vision d'un G.-C. Rota, je voudrais maintenant porter le questionnement sur le territoire de l'autre, pour soutenir que l'idée d'une logique extra-intuitive, distinguée et opposée comme fonction à la fonction intuitive, se défend très difficilement de nos jours.

2 Logique et intuition

En effet, l'essor de la logique contemporaine, que l'on a toute les raisons de rattacher à l'œuvre pionnière de Frege dans la *Begriffschrift*, est inséparable d'une mutation de la logique soustrayant celle-ci à l'extra-territorialité du *logos*. La mise au jour de la forme théorique de la logique des prédicats du premier ordre, très largement admise par la suite en tant que forme suprême dominant toute rationnalité, ne va pas sans la fixation (conventionnelle) d'un régime symbolique et textuel, et sans l'explicitation en termes des configurations symboliques possibles des gestes de la dérivation démonstrative. Chacun sait que Frege nous a donné la *Begriffschrift* dans un écrin notationnel fort aride. La volonté de dégager dans leur normativité les formes de l'articulation logique, supposées gouverner toute performance rationnelle, est inséparable de la volonté de mettre au clair ce contenu normatif en faisant passer la logique sous les fourches caudines d'une *morphologie* logique. Aujourd'hui, ce que chacun reconnaît dans les sciences formelles comme le noyau que tous partagent est la capacité à reconnaître comme correcte ou incorrecte une dérivation dans un système formel. Mais cette capacité suppose elle-même que le système formel ait été convenablement défini, c'est-à-dire

1. que l'on connaisse exactement la forme symbolique prise par les "jugements" du système ;

2. que l'on sache les règles d'inférence, autorisant la prolongation d'un arbre de dérivation à un nœud supplémentaire.

En d'autres termes, il n'y a pas de forme logique, de raisonnement logique, sans spécification d'un langage formel et de règles formelles de dérivation, c'est-à-dire sans que l'on se soit préalablement accordé sur un type idéal de textualité définissant les textes logiques comme tels. La logique suppose l'aperception, au-delà de l'effectivité et de la particularité vernaculaire, épistémologique, des textes, d'une forme de la textualité logique, forme que supportent et illustrent des constituants qui doivent pouvoir être présentés au moyen d'une clause récursive, sur le mode de l'objectivité constructive.

Ce qui est *jugement*, dans le système formel considéré, doit ainsi être défini au moyen d'une clause récursive, si ce n'est au moyen d'une instruction d'assemblage strictement finitaire (nous ne pouvons pas nous contenter, pour mettre en œuvre la forme logique et nous réclamer d'elle, de la textualité ordinaire, nous devons nous transposer dans un idiome "engendrant" les jugements au gré de la pratique formelle de la construction.

Ce qui est *acte de dérivation licite* est jugé tel en relation à des règles d'inférence que l'on doit pouvoir stipuler, et qui font partie de l'énoncé d'une clause récursive explicitant ce qu'est un théorème pour le système formel considéré. Un acte de dérivation typique autorisé se définit en termes de la morphologie des jugements sur lesquels il s'appuie, prescrivant celle du jugement produit.

Il en va ainsi pour commencer du calcul des prédicats du premier ordre lui-même, et de la déduction des ses "théorèmes" logiques.

En sorte que la forme universellement légitimante de la logique est elle-même profondément tributaire d'une "déprise" acceptée à l'égard de la signifiance de *logos*, autorisant la prise en vue de la morphologie de la textualité proprement logique, c'est-à-dire en fin de compte et pour dire les choses comme elles sont, d'une strate intuitive première : pour disposer du canon du calcul des prédicats du premier ordre, je dois comprendre la fabrication d'objets selon une clause récursive, je dois savoir partager l'intuition de l'objet constructif.

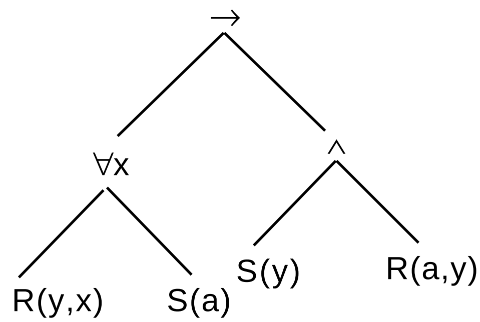
Pour reprendre les notions fondamentales chères à Frege, posséder la subsomption comme signification logique ne peut pas être séparé, du point de vue de l'universalisme formel contemporain, de la compétence dans le jeu de la substitution : en un sens, s'assurer de la correction d'un raisonnement en tant que procédant à des subsomptions passe par une reconstruction au gré de laquelle la subsomption est manifestée dans la substitution d'un terme authentifié comme tel à une variable. Cela ne peut pas être séparé non plus des règles d'inférence d'introduction et d'élimination des quantificateurs, contribuant à instruire la production des arbres d'une dérivation correcte dans le LPC.

La situation paradoxale est donc que, à l'heure même où, sur la scène philosophique, la logique était mise en avant vigoureusement comme le lieu de légitimation par excellence du sens philosophique, et ce, dans un désaveu de tout motif "intuitif", du côté de la logique proprement dire, de l'aire universellement célébrée de la logique "symbolique", "technique", de la logique devenue *logique mathématique* pour tout dire, l'affaire logique était placée sous condition intuitive, profondément subordonnée au partage par les usagers des disciplines formelles de l'objectivité constructive, de la vision des arborescences comme telles, de la pratique conforme aux règles des agencements démonstratifs ou calculatoires.

Bien entendu, il ne s'agit plus de la même intuition, s'il est vrai que cette intuition n'est pas réception passive d'un objet informatif, mais *construction* précisément, c'est-à-dire *présentation agie* d'objets[4]. L'intuition de l'*intuitionnisme* comporte à titre de moment l'explicitation d'un thème actif qui lui permet de coller à la réalité de la mathématique. On aurait néanmoins tort de comprendre cette intuition comme radicalement hétérogène à l'ancienne. Le terme *intuitionnisme* n'est pas choisi de manière délirante et inappropriée. Chaque fois que l'on définit des objets en termes d'objets primitifs et de modes de fabrication - au moyen d'une "clause récursive" – on donne lieu à une classe d'objets à chacun desquels correspond un itinéraire de production résumable dans un arbre, et le partage par les acteurs de l'affaire logico-mathématique de la sorte d'objets en cause passe par la "vision" de la structure arborescente de leur production dans ces objets. Chomsky enseigne que la perception linguistique compétente dont rend compte la grammaire générative est celle des phrases structurées par leur arbre plutôt que "données" dans l'écriture linéaire : si nous comprenons les phrases, c'est parce qu'à un certain niveau qui peut bien être inconscient

[4]. Comme il m'est arrivé de la nommer. Cf. notamment " Platonisme et philosophie des mathématiques ", in *L'objectivité mathématique - Platonismes et structures formelles*, M. Panza et J.-M. Salanskis (Ed.), Paris, 1995, Masson, 179-212.

nous les percevons "saisies" par la forme que déduit pour elle sa théorie[5]. De même, le contenu scientifique partagé par les logiciens travaillant dans le cadre de la logique des prédicats est, pour commencer, celui de la visée d'une phrase comme $(\forall x R(y,x) \vee S(a)) \rightarrow (S(y) \wedge R(a,y))$ suivant son arbre



Ce partage, que nous devons décrire à la fois comme le partage d'un *voir comme* arborescent et comme le partage d'un *faire* réglé, tient authentiquement un rôle légitimant dans le champ de la logique contemporaine : toute l'exposition des contenus logiques est constamment projetée sur des dispositifs notationnels de cette sorte, et rapportée, pour ce qui est de la certitude et de l'exactitude véhiculée, à des modes d'agencement du symbole tributaires de ces dispositifs.

Ce qu'est une preuve formelle, en particulier, se voit définir de nos jours en référence à un mode démonstratif particulier, lui même essentiellement défini par des axiomes et des règles d'inférence, mettant en jeu des jugements assujettis à une certaine forme lingui-stique. Les théorèmes du mode démonstratif sont à leur tour les objets d'une classe constructive, chacun apparaissant avec l'arbre d'engendrement qui lui convient (est qui est l'arbre d'une preuve, d'une dérivation dans le système). L'essence de ce qui est appelée *preuve* perd tout lien nécessaire avec la notion d'affirmation, de prédication ou de quantification, avec les composantes classiquement connues du *logos* en tant que déclaration de l'état du monde et de ces objets. On ne garde que l'idée d'obtention de jugements répondant à une morphologie fixée, selon des règles à partir de jugements acceptés *a priori*, et suivant une dérivation qui se résume dans un arbre.

Le motif logique s'éloigne du *logos* pour tomber dans une certaine intuitivité, celle mise au jour par Brouwer, mais il s'expose, du même coup, à sa réification machinique. Dans une certaine mesure, on peut demander à une machine de produire tous les théorèmes d'un système formel (ceux-ci sont récursivement énumérables) : au moins, dans la mesure où l'on admet parmi les machines les nouvelles sortes de machine qui réifient le processus de construction suivant une clause récursive, qui savent réagir de manière déterministe, à une entrée au format symbolique, par un réarrangement typique de l'agencement entrant. Tout le processus computationnel intervient ainsi comme illustration physique, mécanique, de la forme du logique découverte au fil de la pensée constructive.

[5]. La théorie chomskienne revendique d'une certaine manière la reconstruction "ontologique" de son corpus.

3 Logique et calcul

Un épisode contemporain qui mérite d'être rapporté de cet éloignement de la forme logique à l'égard du *logos* est la mise au jour de la correspondance de Curry-Howard. Le principe de correspondance consiste dans l'association d'un terme du lambda-calcul à tout arbre de dérivation dans un système logique standard. Le plus simple est de présenter la chose à partir de la déduction naturelle dans un calcul des propositions réduit au connecteur implication. Cette déduction naturelle a donc deux uniques règles, d'introduction du $\rightarrow$ [I($\rightarrow$)] et d'élimination du $\rightarrow$ [E($\rightarrow$)] :

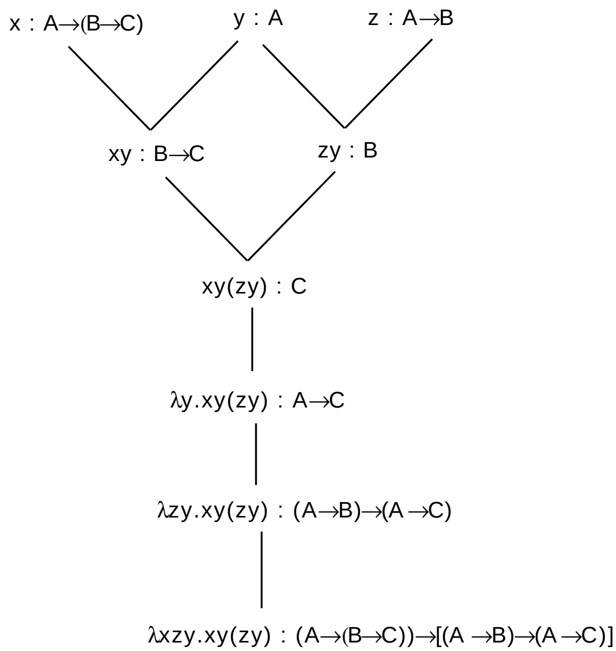
$$\mathrm{I}(\rightarrow)\quad \dfrac{\begin{matrix}[\mathrm{X}]\\ \vdots \\ \mathrm{Y}\end{matrix}}{\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}} \qquad\qquad \mathrm{E}(\rightarrow)\quad \dfrac{\mathrm{X} \qquad\qquad \mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}}$$

(où il est entendu que, lorsqu'on applique I($\rightarrow$), on "décharge" la prémisse X).

Dans la perspective de la correspondance de Curry-Howard, on envisage toujours qu'une formule est "acquise" au titre d'une preuve, et cette preuve, on conçoit généralement que sa structure, sa teneur, son individualité, sont représentées par un terme du lambda-calcul. Si une formule est une prémisse, cela se traduit par le fait que la preuve qui la soutient est absolument indéterminée. On écrit donc t : A pour exprimer que la formule A nous est donnée par une preuve que représente le terme t, et x : X pour exprimer que la formule X, nous étant donnée par une preuve indéterminée représentée par la variable x, est une prémisse. L'idée est alors que l'application d'une règle, que ce soit I($\rightarrow$) ou E($\rightarrow$), construit en même temps le terme "soutenant" l'assertion éventuelle de la formule obtenue, de telle manière que l'épisode de l'application de règle y soit marqué. On réécrit alors les deux règles de la façon suivante :

$$\mathrm{I}(\rightarrow)\quad \dfrac{\begin{matrix}\mathrm{x} : [\mathrm{X}]\\ \vdots \\ \mathrm{t} : \mathrm{Y}\end{matrix}}{\lambda\mathrm{x.t} : \mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}} \qquad\qquad \mathrm{E}(\rightarrow)\quad \dfrac{\mathrm{s} : \mathrm{X} \qquad\qquad \mathrm{t} : \mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}}{\mathrm{ts} : \mathrm{Y}}$$

En d'autres termes, si j'obtiens X→Y en étant parti de la prémisse x : X en arrivé à la formule t : Y, je considère que le terme "fonctionnel" $\lambda x.t$ (l'application qui à x associe t, dans la glose usuelle) soutient la formule obtenue. Si, de même, j'obtiens Y à partir d'un *modus ponens* construit sur s : X et t : X→Y, je considère que le terme ts (l'enchaînement des règles s et t, dans la glose usuelle) soutient la formule obtenue. Une telle méthode de correspondance, suivie systématiquement, associe à n'importe quelle preuve, se déployant en un arbre, un terme du lambda-calcul qui la résume, et qui exprime même son arborescence, qui restitue dans un agencement linéaire l'arbre de production de la preuve, en montrant, en particulier, comment elle a joué sur des suppositions (les prémisses, chacune se signalant par une variable), et en a éliminé la relativité par décharge. Indiquons, ainsi, la preuve du théorème de notre calcul implicatif qu'est $(A \to (B \to C)) \to [(A \to B) \to (A \to C)]$:



Le terme obtenu est celui qui exprime le combinateur S du calcul de Curry, celui qui "code" la composition des correspondances fonctionnelles[6], comme on pouvait le souhaiter.

Si l'on essaie de récapituler, la représentation arborescente de la preuve signale l'interprétation intuitive de la preuve dans sa rectitude par une objectivité constructive appelant un *voir comme* spécifique. "Derrière" cette première transposition "dévaluant" en un sens le *logos* et sa charge déclarative, la correspondance de Curry-Howard rétablit un "dit" linéaire, qui retrace la dérivation comme calcul, comme agencement d'actes applicatifs réglés exprimés par le lambda-calcul. Cette nouvelle traduction va donc dans le sens d'une reprise de la

[6]. En agissant selon la règle $Sxyz = xz(yz)$.

chose logique sous la catégorie du calcul. Si l'être dévisagé par le mathématicien-logicien apparaît comme celui de l'objectivité constructive, la notion de preuve se réduit à l'agir de cet être, c'est à dire au calcul. *Quid*, dans cette perspective, de la légitimité de la preuve ? Elle devient, semble-t-il, la réitérabilité conformément à son modèle du calcul opérant sur l'objectivité constructive. Le problème est donc de savoir si l'on accepte comme une unique mesure de légitimité pour la philosophie cette certitude du calcul-preuve, ayant son identité quelque part entre le *voir comme* arborescent et l'agir corrélatif, et à l limite, même, dans le calcul auquel cet agir s'identifie, ou si, comme notre expérience paraît au moins nous le suggérer, il est aussi question, en philosophie, de savoir entendre les mots, c'est-à-dire de montrer une fidélité particulière aux demandes du sens. En tout état de cause, la légitimité logique n'a pas été préservée dans le contexte contemporain tel qu'Aristote et les médiévaux pouvaient encore la penser, contrairement à ce que semblent la plupart du temps supposer les philosophes analytiques.

Je vais prolonger la réflexion d'un cran en évoquant maintenant une valeur existentielle que l'on peut attribuer à la preuve, regardée dans son accomplissement "vertical", que lui prête le plus souvent notre compréhension spontanée.

4 Arbres cumulatifs et chemins d'existence

En principe, c'est ce que j'ai tenu à dire au début de la section précédente, les théorèmes sont définis comme une classe d'objets constructifs au moyen d'une clause récursive, à l'instar des formules du calcul des propositions ou des nombres entiers : on décide d'appeler *théorème* tout ce qui peut être fabriqué à partir de théorèmes primitifs dénommés axiomes en utilisant des règles de fabrication de nouveaux théorèmes, dénommées *règles d'inférence*. Pour chaque théorème, on peut donc dessiner un arbre qui retrace sa dérivation à partir des axiomes au moyen des règles, de même que, pour chaque formule du calcul des propositions, on peut présenter un arbre qui relate l'assemblage de la formule à partir des formules primitives (les variables propositionnelles) au moyen des règles d'assemblage (une par connecteur logique, unaire ou binaire selon le cas).

Pourtant, à y réfléchir un peu plus, les deux situations ne sont pas strictement homologues, du moins si l'on s'en tient à la manière dont nous "vivons", respectivement, l'assemblage d'une formule et la dérivation d'un théorème. Deux différences peuvent, je crois, être repérées :

1. Dans le cas de l'assemblage d'une formule, chaque variable propositionnelle intervient un certain nombre de fois "à l'origine", et ne peut plus être "rappelée" dans la construction une fois que toutes ses occurrences ont été employées. Une fois consommées, les feuilles de l'arbre sont figées dans le premier construit partiel où elles interviennent. En revanche, dans le cas d'une dérivation de théorème (une preuve), je peux "appeler" à nouveau un axiome (pour l'instancier, en général) chaque fois que cela me chante au long de la preuve.

2. Dans le cas de l'assemblage d'une formule, si je connais la nature d'un noeud de l'arbre et le résultat d'assemblage auquel il a donné lieu (la sous-formule acquise avec lui), je peux "retrouver" le ou les fils du noeud en question. En revanche, dans le cas d'une preuve, si je sais qu'une formule Y est obtenue en application de la règle du *modus ponens*, rien ne me permet, dans la morphologie de Y, de retrouver le X tel que $X \rightarrow Y$ et X figuraient dans la preuve "avant".

Bien entendu, ces deux différences peuvent être contestées. Pour la seconde, on dira qu'il suffirait de se doter d'un dispositif notationnel adéquat pour que le cas démonstratif soit homogénéisé avec le cas d'assemblage : au lieu de noter Y après $X \rightarrow Y$ et X, on noterait $MP(X \rightarrow Y, X)$, par exemple. Mais cela reviendrait à consigner les démonstrations d'une manière telle que ce qui "résulte" d'elles ne se lirait plus directement, mais serait à "calculer" par réduction, décision qui serait extrêmement contraire à l'esprit et à la pratique de la preuve[7].

De même, je peux considérer, une fois la preuve achevée, qu'on sait exactement de combien d'occurrences de chaque axiome on a besoin, et qu'un arbre peut donc être édifié dont la base est explicite et ne s'élargit pas au fil de la dérivation. Mais dans cette hypothèse, on ne consigne plus le trajet démonstratif d'une manière susceptible de correspondre à la réalité de la recherche logique : de fait, le logicien ou le mathématicien peuvent avoir besoin d'instancier à nouveau un axiome déjà employé à tout moment de sa preuve.

Ces deux différences sont donc liées à une "réalité" temporellement linéaire des preuves qui contredit ou dépasse dans une certaine mesure leur struc-ture arborescente, mais qui exprime exactement la façon dont nous vivons la construction par nous-mêmes d'un chemin démonstratif. Je propose d'opposer les deux "modes" de construction d'un objet constructif (la formule dans un cas, la preuve dans l'autre) comme mode de l'*arbre cumulatif* et mode du *chemin d'existence*. Une démonstration fait valoir les théorèmes comme des objets constructifs, atteints au moyen d'une séquence de choix autorisés par une clause récursive, mais elle déroule plutôt un chemin d'existence qu'un arbre cumulatif. Les ressources de la preuve ne sont pas fixées une fois pour toutes au départ, celui qui prouve peut revenir en arrière aussi loin qu'il veut dans sa preuve pour

[7]. Le problème que je soulève ici à propos de la règle du *modus ponens*, et en me référant implicitement à une présentation hilbertienne classique de la déduction dans une théorie logique, est d'une certaine manière connu et reconnu en théorie de la démonstration. Dans le cadre, fixé par Gentzen, du calcul des séquents, on s'est attaché à prouver qu'il était possible de réécrire toute preuve en se passant du procédé qui, dans ce système, correspond au *modus ponens* : le procédé de la coupure. Cette volonté se fonde précisément dans le souhait d'obtenir des preuves ayant la propriété dite *de la sous-formule*, c'est-à-dire des preuves non erratiques, travaillant constamment un même matériel formel, dans la mesure du possible rétro-parcourables. On démontre effectivement un théorème d'élimination des coupures pour ce qui est l'équivalent de l'inférence dans la logique des prédicats. Mon point de vue n'est pas celui de la possibilité de principe qu'explore la théorie de la démonstration : je m'attache plutôt à dépeindre l'usage effectif de la preuve formelle dans le contexte où l'on y recourt le plus, celui des mathématiques. Il ne me paraît guère contestable que le *modus ponens* fait partie de façon non éliminable de l'heuristique mathématique. L'ingéniosité du mathématicien chercheur s'attachant à établir Q consiste notamment à trouver de bons P tels que P et $P \rightarrow Q$ soient prouvables.

faire appel de nouveau à un axiome une première fois mobilisée. Le cours de la preuve a quelque chose d'irréversible, elle mobilise des formules d'appui dans des *modus ponens* que le résultat obtenu occulte parfaitement.

L'idée est que cette double manière d'avancer en régime constructif, d'une part en laissant disparaître de l'inscription courante des matériaux utilisés, d'autre part en se réservant la possibilité de ré-accéder quant on veut à tout schème axiomatique mobilisé une première fois, est précisément la façon de l'existence : une existence, volontiers et typiquement, cache dans ses productions les éléments consommés, une existence, par principe, s'autorise à "revenir" en un point créatif de son passé pour le réanimer. Les deux propriétés n'étant qu'apparemment contradictoires : l'homme joue sur l'oubli et la mémoire en même temps, il est, à vrai dire, une temporalisation contradictoire, révolutionnante et conservatrice à la fois. Cette façon de décrire l'homme sous le double rapport de la mémoire et de l'oubli ne peut pas ne pas nous évoquer Freud ou Lacan. Ce que j'ai baptisé ici chemin d'*existence*, en me référant à la détermination phénoménologique de l'homme (Heidegger, Sartre) pourrait sans doute sans grand mal être appelé *désir*.

En tout cas, ce qui m'importait, c'est que la détermination de la preuve dans les termes "intuitifs" de la constructivité ne signifie pas la réduction des mathématiques à l'assemblage sans histoire, ou au fonctionnement machinique : la preuve appelle une considération d'elle-même qui fasse droit à son "existentialité dans la construction".

Si l'on considère cet aspect de l'activité de preuve, on découvre une signification imprévue de la légitimation logique. Les preuves sont capables de justifier nos assertions parce qu'elles rassemblent en elles un "destin" de notre comportement formel qui s'est fixé en tel ou tel résultat : nous avons du mal à considérer comme une vraie preuve ce qui ne consigne par un tel parcours, ne peut pas être "assumé" par un opérateur oscillant entre la mémoire et l'oubli[8]. C'est évidemment un tout autre registre de légitimation, par le contingent plutôt que par le nécessaire à la limite. Mais il mérite d'être pris en considération, ne serait-ce qu'en raison du grand rôle qu'il joue dans la mathématique.

En résumé, la prévalence actuelle de la forme logique dans le débat sur le ou les modes de la légitimation montre que ce n'est pas ou plus strictement en tant qu'application de principes an-intuitifs, sémantico-conceptuels que la preuve légitime, mais plutôt, en même temps et plus essentiellement, en tant qu'analogue du destin dans le comportement formel, ou en tant que comportement s'offrant à une ressaisie "intuitive" panoramique sous l'angle de la construction, si ce n'est en tant que processus identifiable à un calcul ou susceptible de réification informatique.

[8]. En témoignent les difficultés que suscitent les actuels résultats partiellement machiniques (dont le théorème des quatre couleurs a été le premier), ou même l'énorme travail collectif concluant l'effort de classification des groupes simples.

5 Conclusion

Suis-je en mesure de rassembler ce qui précède dans une conclusion qui dirait l'essentiel quant au rapport entre preuve et légitimation? Je puis au moins essayer d'exclure certaines fausses idées.

Il me semble, simplement, qu'il faut absolument éviter de diviniser la logique. On peut être tenté, prenant acte du développement considérable qui a été celui de la logique au vingtième siècle, et de la beauté et de l'exactitude de l'édifice théorique obtenu, de considérer que la forme logique a atteint une perfection à la fois conceptuelle et pratique, forme qui résout une fois pour toutes tous les problèmes de légitimation que l'on peut se poser, tout en mettant au rencart toute idée d'un accès intuitif à quelque vérité que ce soit. Je crois qu'on a systématiquement tort de juger ainsi, pour un ensemble de raisons que je vais énumérer ci-dessous, et qui ne sont pas de même niveau.

1. Le développement récent de la logique est aussi celui des logiques plurielles, divergentes. Je n'ai pas du tout insisté sur ce point, que d'autre intervenants de cette rencontre peuvent présenter mieux que moi (je pense évidemment à Shahid Rahman). Logiques intuitionniste, libre, paraconsistante, modales, tri- ou multi-valente, quantique, etc., les dernières décennies ont vu apparaître un grand nombre de candidats à la place de "canon" pour le raisonnement humain, faisant fleurir la pensée que le canon dépendait du contexte, qu'il fallait varier la logique selon les investissements "régionaux" de l'effort théorique. Concéder un tel point, c'est immédiatement et incontournablement concéder qu'il y a un motif de légitimation qui transcende la logique (celui qui pousse à dire que telle logique est adaptée à tel type de discours ou de démarche rationnelle).

2. Pour autant que, néanmoins, on peut plaider qu'il est apparu une forme logique dominant toutes les réalisations particulières, et qu'une telle forme est le véritable principe gouvernant toute rationalité et recelant toute légitimation, alors je ne vois pas comment on pourrait identifier cette forme autrement que comme la simple forme de la définition par clause récursive d'une classe de jugements dérivables, c'est-à-dire la forme de l'objectivité constructive. Or cette forme est une forme de monstration avant que d'être une forme de démonstration. Elle n'"appartient" pas de manière essentielle au *logos* et à ses façons d'administrer le sens, on la voit à l'oeuvre indépendamment de lui, et lorsqu'elle se saisit du *logos*, elle met en lumière des aspects morphologiques de la preuve qui sont étranger du dire vrai ou à l'enchaîner correct comme tels. En sorte que la vertu légitimante paraît procéder en fait, si elle est dispensée par la logique, de l'intuition arborescente du constructif, du style destinal des cheminements déductifs hilbertiens, ou, "pire" en quelque sorte, du caractère machinique de la pensée.

3. Sur le fond des choses, de telles difficultés signalent que l'exclusive confiance faite à la forme logique en matière de légitimation n'est pas juste.

On confond souvent deux thèses, qui doivent être absolument distinguées : a) le discours philosophique doit se présenter comme discours publiquement justifié, comme discours s'exposant à la critique et affirmant ce qu'il affirme avec des arguments ; b) les thèses philosophiques doivent toutes être exposées comme des résultats de preuves logiques. La volonté de légitimation qui est de manière inaliénable celle de la philosophie ne peut pas se laisser enfermer dans le cadre logique. Aucun discours philosophique ne peut éviter d'en appeler à l'évidence quelque part, de s'appuyer sur un ”nous savons bien que ...” qui est censé exprimer la nature ou la struc-ture de notre expérience. Aucun discours philosophique ne peut articuler son message théorique dans l'indifférence absolue à l'égard des conditions de la pratique, en oubliant que même parler en essayant de dire le vrai, c'est faire.

Lorsque, donc, on découvre que la logique elle-même, à la faveur de l'effort considérable qui a été fait pour dégager de manière exacte ses formes et prescrire de manière inambigu l'application de ses règles, trahit un fond intuitif, existentiel ou machinique, on ne doit pas pleurer cet état de fait comme un revers pour la rationalité, mais plutôt se réjouir que dans le champ logique lui-même, le caractère composite et feuilleté de la légitimation se manifeste.

4. La possibilité de ne pas s'émouvoir d'une telle diversité, d'une telle non-exclusivité, résulte peut-être, en dernière analyse, d'une autre perspective sur la légitimation : il me semble que pour beaucoup d'auteurs, la légitimation concerne et ne peut concerner que la vérité. Légitimer, c'est légitimer des énoncés, c'est-à-dire encore justifier notre *tenir-pour-vrais* ces énoncés. C'est à une telle notion de la légitimation que la logique semble procurer pour ainsi dire par définition son instrument adéquat. Mais la légitimation philosophique doit nécessairement avoir une tout autre ampleur, une tout autre assise. Pour moi, comme j'entends et comprends la philosophie, légitimer quelque chose du cercle des choses humaines, c'est la placer dans l'orientation de son sens, c'est voir à quoi elle porte en fonction de ce à quoi elle répond. Privilégier, en matière de légitimation, la perspective du sens, cela conduit nécessairement à respecter, à prendre en considération la régionalité des sphères du sens, et la diversité des régimes ou facultés qu'elles mobilisent.